Anwendungsorientierte Analysis – Beispiele aus der Stochastik

1. Aufgabe

In einer Urne sind nur 10 blaue Kugeln und in einer weiteren Urne nur 20 rote Kugeln.
Von außen ist nicht zu erkennen, welche Kugeln in den Urnen sind.

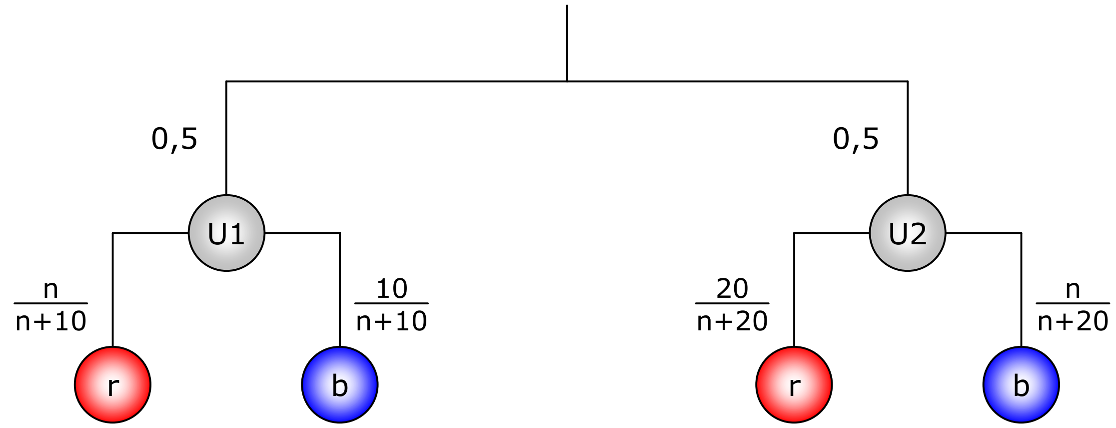
Bruno darf zufällig eine der beiden Urnen wählen und daraus eine Kugel ziehen.
Ist die Kugel rot, hat er gewonnen.

Bevor er die Urne wählt, darf Bruno zusätzliche rote Kugeln in die erste Urne legen lassen. Allerdings werden dann genauso viele blaue Kugeln in die zweite Urne gelegt.

Beraten Sie Bruno, wie er die besten Gewinnaussichten erreicht.

Anwendungsorientierte Analysis – Beispiele aus der Stochastik

Baumdiagramm



Lösung

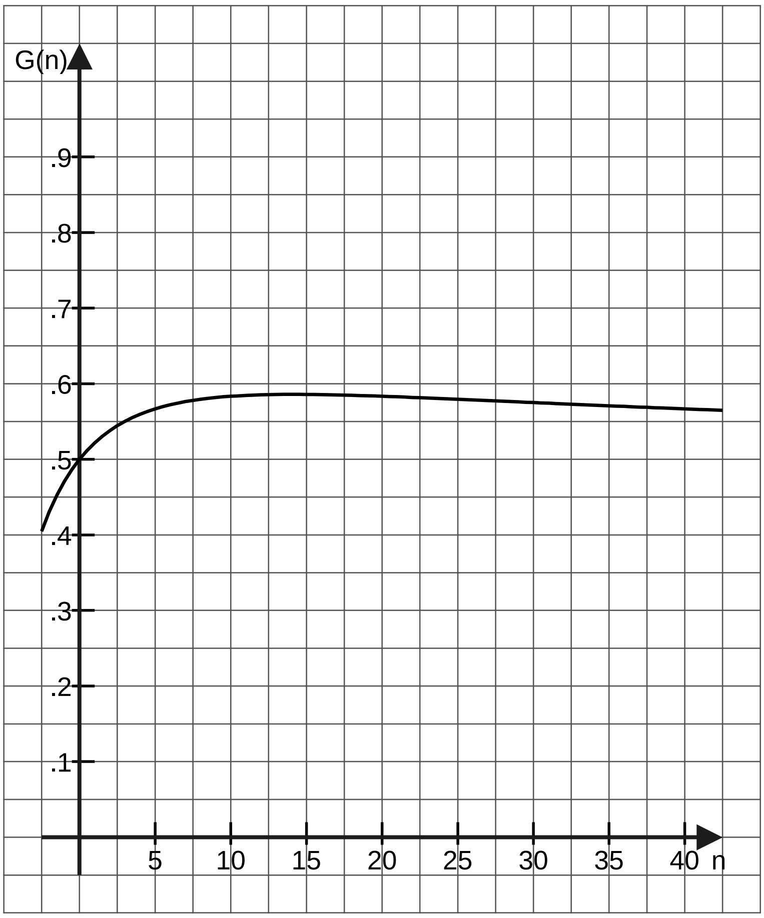
Brunos Gewinnwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von n ist

$$G(n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{n+10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{n+20}$$

$G(0) = 0{,}5$
$G(n) \to 0{,}5$ für $n \to \infty$

Maximum für $n \approx 14{,}14$

$G(14) \approx 0{,}5858$
$G(15) \approx 0{,}5857$



Bruno hat die besten Chancen, wenn jeweils 14 Kugeln zugefügt werden.

Anwendungsorientierte Analysis – Beispiele aus der Stochastik

2. Aufgabe

In einer Urne sind nur 10 rote Kugeln und in einer weiteren Urne nur 20 blaue Kugeln.
Von außen ist nicht zu erkennen, welche Kugeln in den Urnen sind.

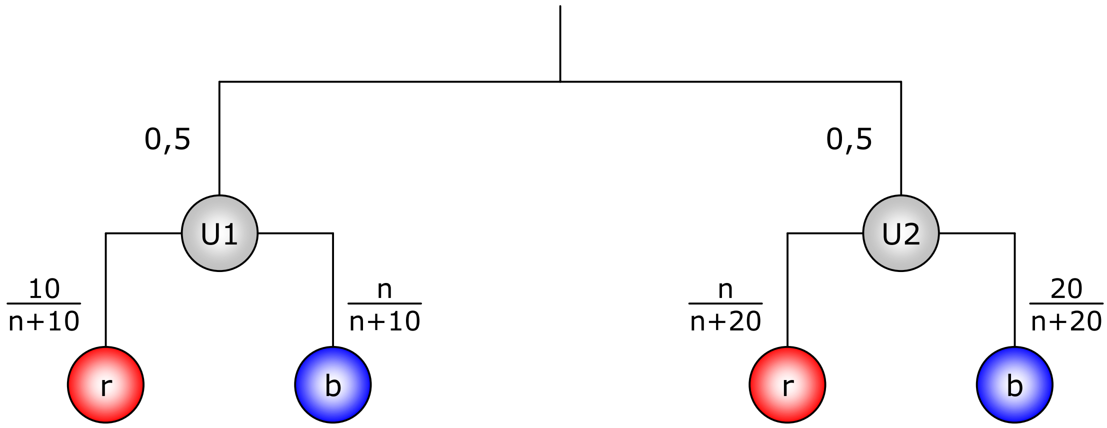
Jürgen darf zufällig eine der beiden Urnen wählen und daraus eine Kugel ziehen.
Ist die Kugel rot, hat er gewonnen.

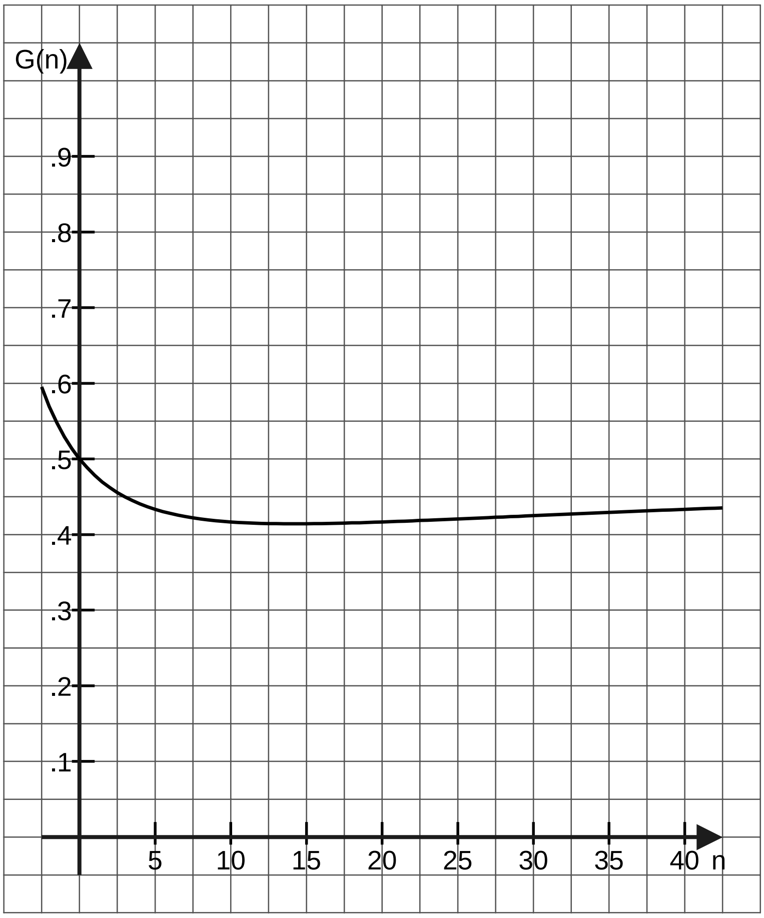
Bevor er die Urne wählt, darf Jürgen zusätzliche rote Kugeln in die zweite Urne legen lassen. Allerdings werden dann genauso viele blaue Kugeln in die erste Urne gelegt.

Geben Sie auch Jürgen einen Rat.

Anwendungsorientierte Analysis – Beispiele aus der Stochastik

Baumdiagramm





Lösung

Jürgens Gewinnwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von n ist

$$G(n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{n+10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{n+20}$$

$G(0) = 0{,}5$
$G(n) \rightarrow 0{,}5$ für $n \rightarrow \infty$

Minimum für $n \approx 14{,}14$

Jürgen sollte keine Kugeln dazulegen, dann ist seine Gewinnwahrscheinlichkeit 0,5.

Anwendungsorientierte Analysis – Beispiele aus der Stochastik

3. Aufgabe

Beim Eintritt der USA in den 2. Weltkrieg mussten in kurzer Zeit Millionen von Rekruten ärztlich untersucht werden. Mit einem Bluttest wurden sie auf eine Krankheit K untersucht, die 1% der Bevölkerung hat.

Es sind zwei Methoden möglich:

- Einzelprüfung

  Jeder wird einzeln untersucht. Man braucht einen Test pro Person.

- Gruppenprüfung

  Das Blut von n Personen wird vermischt und untersucht.
  Sind alle gesund, genügt dieser eine Test.
  Ist mindestens ein Kranker dabei, wird jeder der Gruppe einzeln untersucht.

Vergleichen Sie die beiden Methoden.

Wie kann man die Zahl der Tests möglichst klein halten?
Wie sieht es bei anderen Wahrscheinlichkeiten der Krankheit aus?

Anwendungsorientierte Analysis – Beispiele aus der Stochastik

Lösung:

Betrachten Sie die Anzahl der Tests bei n Personen:

- Einzelprüfung: Ein Test pro Person, es sind genau n Tests für n Personen nötig.
- Gruppenprüfung: Wenn alle n Personen gesund sind (Wahrscheinlichkeit = $0{,}99^n$), dann genügt ein Test

  Wenn mindestens eine Person krank ist (Wahrscheinlichkeit = $1 - 0{,}99^n$), dann benötigt man (n+1) Tests.

Erwartungswert $E = 0{,}99^n + (n+1) \cdot (1 - 0{,}99^n)$

Durchschnittliche Anzahl von Tests pro Person

- Einzelprüfung: 1 Test
- Gruppenprüfung: $N(n) = 1 + \frac{1}{n} - 0{,}99^n$

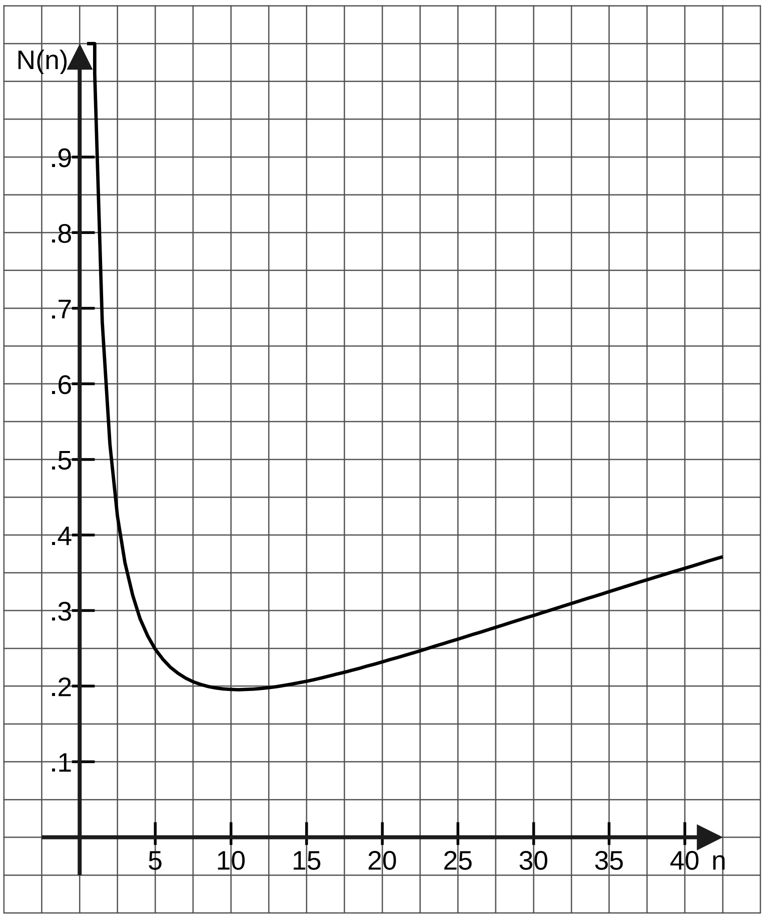
Minimum für $n \approx 10{,}52$

$N(10) \approx 0{,}19562$

$N(11) \approx 0{,}19557$

Bei 1 Million Rekruten
195.600 Tests statt 1.000.000.

Über 80 % Ersparnis!!



Anwendungsorientierte Analysis – Beispiele aus der Stochastik

Weitere Überlegungen ergeben:

(p = Wahrscheinlichkeit für Gesundheit , im Beispiel 0,99)

Ersparnis pro Person: $p^n - \frac{1}{n}$ (Differenz aus den Werten von Methode 1 und 2)

1. Gruppentest nur vorteilhaft, wenn $p > 0{,}694$.

   Begründung:

   Damit Tests gespart werden, muss $1 + \frac{1}{n} - p^n$ kleiner als 1 sein, bzw. $p^n - \frac{1}{n} > 0$

   d.h. $p^n > \frac{1}{n}$ $\quad p > \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$

   $\sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ hat das Minimum 0,694 (bei n = 3)

2. Zweiergruppen sind nie optimal.

   Begründung:

   $p^3 - \frac{1}{3} > p^2 - \frac{1}{2}$ für diese p

3. Dreiergruppe optimal für $0{,}694 < p < 0{,}876$