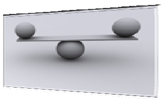


Das Nash-Gleichgewicht

John Forbes Nash Jr. (* 13. Juni 1928 in Bluefield, West Virginia) ist ein US-amerikanischer Mathematiker, der besonders in den Bereichen Spieltheorie und Differentialgeometrie gearbeitet hat. Im Jahr 1994 erhielt er zusammen mit Reinhard Selten und John Harsanyi den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften für die gemeinsamen Leistungen auf dem Gebiet der Spieltheorie. Damit ist er einer der wenigen Mathematiker, die einen Nobelpreis erhalten haben, da es keinen speziellen Nobelpreis für Mathematik gibt.

Nashs Leben ist von großer Tragik geprägt: Nach einem vielversprechenden Start seiner mathematischen Karriere erkrankte er mit dreißig Jahren an Schizophrenie und erholte sich erst wieder in den neunziger Jahren davon. Nashs Geschichte ist Ende 2001 einem breiteren Publikum durch den Hollywood-Film A Beautiful Mind bekannt geworden, der mit vier Oscars ausgezeichnet wurde.

Von „http://de.wikipedia.org/wiki/John_Forbes_Nash_Jr.“

Das Nash-Gleichgewicht bildet eine Entscheidungskriterium über die Spieltheorie hinaus, so z. B. bei der Frage, ob die USA in den Krieg gegen den Irak ziehen sollten. Die Matrix zeigt die Alternativen:

Bush Hussein	nachgeben	nicht nachgeben
nachgeben	Frieden für Bush Frieden für Hussein	Macht für Bush Ohnmacht für Hus- sein
nicht nachgeben	Macht für Hussein Ohnmacht für Bush	Krieg für Bush Krieg für Hussein

Unter folgenden Voraussetzungen:

Macht > Frieden > Krieg > Ohnmacht

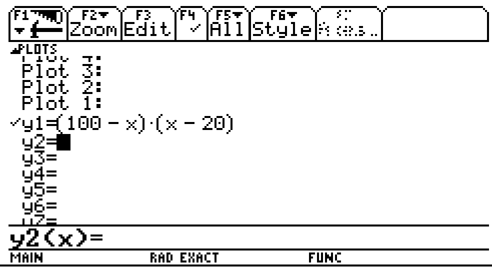
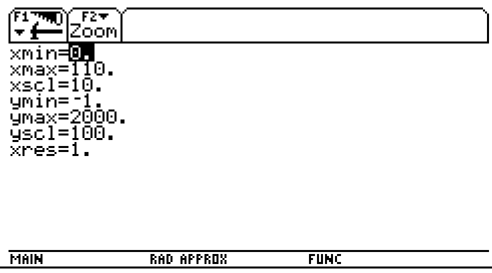
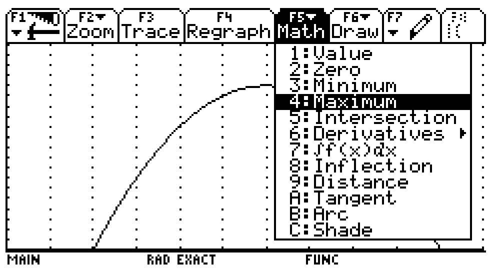
ergibt sich, da Macht für beide gleichzeitig nicht möglich ist, dass der Krieg das Nash-Gleichgewicht bildet. Die USA bedienen sich häufig dieses Entscheidungsmodells, um Ihr politisches Vorgehen mathematisch zu untermauern.

Arbeitsaufträge[1]

I. Monopol

Ein Maschinenbauer Hörer hat ein Bauteil patentieren lassen und daher ein Monopol. Die Grundnachfrage beträgt 100 Stück, wobei alle Angaben pro Tag und in € abgefasst sind. Es gibt eine Nachfrageverringerung von 1 Stück pro € des Preises. Die Kosten betragen 20€ pro Stück. Bestimmen Sie den maximalen Profit.

Grafische Lösung:

Wir geben im y-Editor die Profitfunktion ein: Zum **y-Editor** gelangt man über die grüne Diamanttaste **[♦]**und **[Y=]**	
Wiederum über die grüne Diamanttaste [♦] und mit **[window]** gelangen wir zur Fenstereinstellung. Wir geben eine passenden Zeichenbereich ein.	
Mit [♦] und **[graph]** wird die Parabel gezeichnet. **[F5]** eröffnet die unterschiedlichste numerische Berechnungen. Wir wählen **4: Maximum** um den Hochpunkt zu bestimmen.	

[1] Nach: Hans-Otto Carmesin: Das Nash-Gleichgewicht, in MNU 57/7 (15.10.2004)

II. Zwei konkurrierende Hersteller setzen Preise fest (iterativ)

Der Maschinenbauer Hörer setzt seinen Preis x fest und erzielt einen Gewinn G(x). Ein Fabrikant Lauscher hat ein gleichwertiges Bauteil patentieren lassen. Dessen Herstellung kostet ebenfalls 20,- €. Die Grundnachfrage beträgt jetzt bei beiden Produzenten 70 Stück. Bei jedem verringert sich die Nachfrage um je 1,- € des eigenen Preises und erhöht sich um 0,5 je € des Preises des Konkurrenten.

a) Wie optimiert Hörer seinen Preis, nachdem Lauscher seinen auf y = 90 festgelegt hat?

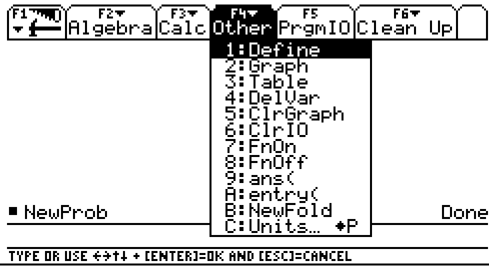
b) Wie optimiert daraufhin Lauscher seinen Preis?

c) Was passiert wenn sich die Preisanpassung fortsetzt?

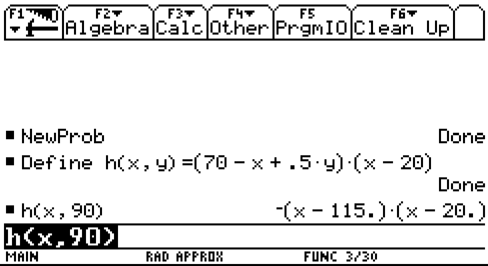
<u>Zu a)</u>

Im Home–Modus **[♦] [HOME]** wird die Gewinnfunktion definiert.

Aus didaktischen Gründen wird die Funktion $h_y(x) = (70-x+0.5y)(x-20)$ über **[F4]** definiert.



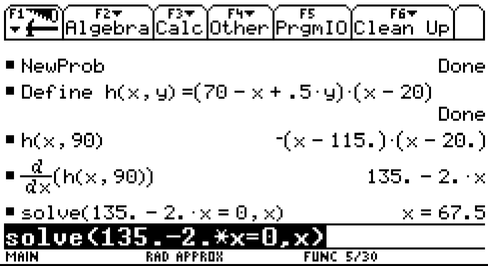
Für y = 90 eingesetzt ergibt dies die Ausgangssituation für Hörer, um seinen neuen optimalen Preis zu berechnen.



Das Maximum wird aus Gründen der Veranschaulichung mittels Ableitungs-funktion bestimmt. Der Befehl „Ableiten“ befindet sich unter **[F3] Calc, 1: diffe-rentiate**. Nach der Variablen hinter dem Komma wird differenziert.

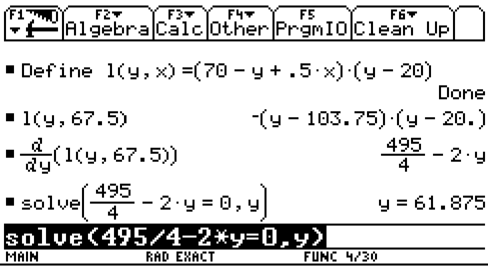
Mit **[F2] solve** wird die Gleichung

$h'_y(x)=0$ nach x gelöst



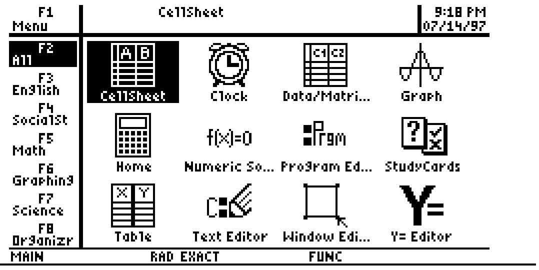
<u>Zu b)</u>

Das Vorgehen ist äquivalent zu a) siehe Bildschirmkopie. Zu beachten ist, dass sich nun die Variablen vertauschen

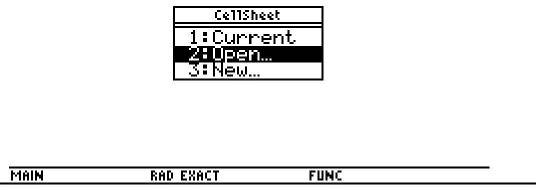


Um den Prozess zu simulieren wird das Tabellenkalkulationsprogramm Cellsheet verwendet.

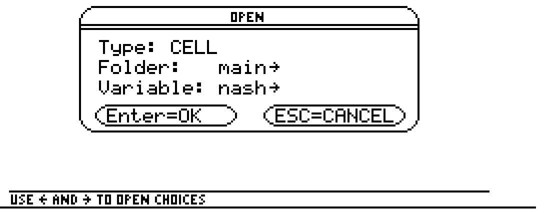
Über die **[APPS]-Taste** erhält man eine Übersicht der vorhandenen Applikationen (Programme auf dem Rechner). Mit den Cursor Tasten [⇐];[⇑];[⇒];[⇓]wird die Applikation CellSheet ausgewählt und mit [Enter] bestätigt.



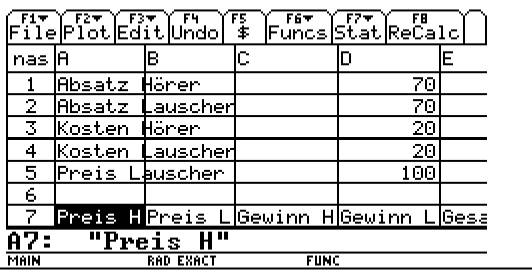
Mit **[Enter]** bestätigen.



Das Verzeichnis **(Folder)** und die Variable „nash" auswählen und mit [Enter] bestätigen

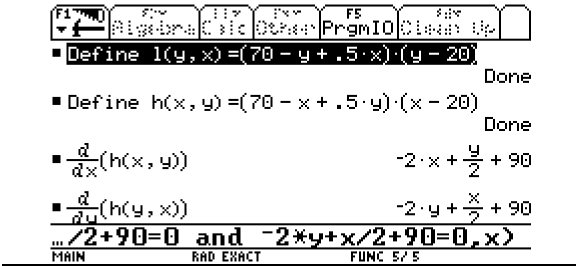
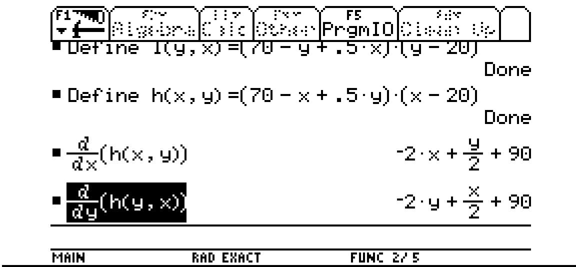


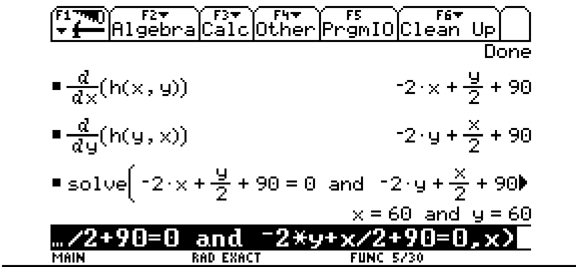
Jetzt braucht man etwas Geduld, da die Berechnungen jeweils neu durchgeführt werden.



III. Zwei konkurrierende Hersteller setzen Preise fest (explizit)

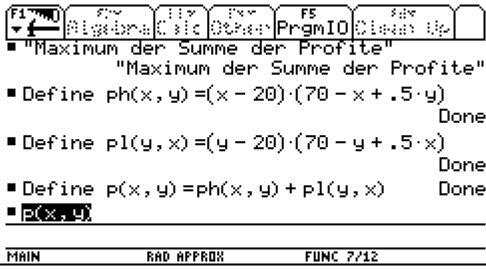
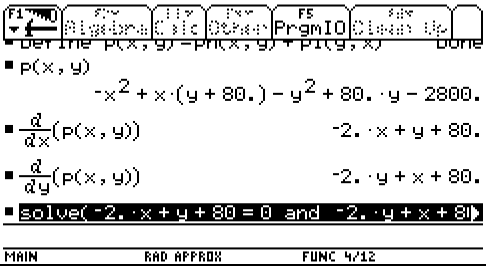
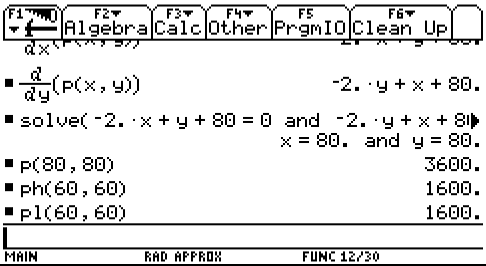
Gesucht ist eine Gleichung, mit welcher der Preis x bei vorgegebenen Preis y direkt berechnet werden kann. Gesucht ist dann eine Gleichung zur Berechnung von y bei gegebenem Preis x.

<table>
<tr><td>Im Modus [♦] [HOME] werden beiden Funtionsscharen definiert.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Mit [F3 Calc] 1: differentiate werden wie oben die Ableitungen gebildet .</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Die beiden Ableitungsfunktionen werden Nullgesetzt und das entstandene Gleichungssystem mit dem bereits bekannten Solve–Befehl gelöst. Zu beachten ist, dass die beiden Gleichungen durch and verbunden werden.

Das Wort „and“ kann über die Tastatur eingetippt werden.</td><td>
</td></tr>
</table>

I. Der Summe der Gewinne wird maximiert.

<table>
<tr>
<td>Wir definieren die Profitfunktion für Hörer und für Lauscher.

Eine dritte Funktion bildet die Summe der beiden Funktion.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Da wir auch am Maximum interessiert sind bilden wir die Ableitung der Summenfunktion sowohl nach x als auch nach y und lösen das dadurch entstandene Gleichungssystem.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Wir sehen nun liegt das Maximum bei 80 und der Profit insgesamt bei 3600 und damit liegt er 400 GE über dem Maximum der Einzelbetrachtungen.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Das Ergebnis ist überraschend, ist doch das Maximum des Gesamtgewinns deutlich über dem Einzelgewinn – es zeigt sich so, dass ein Absehen vom betriebswirtschaftlichen Gewinn hin zu einem Einbeziehen der Konkurrenten für beide einen Vorteil bietet.
Notizen: