



Kompetenzorientierte Aufgaben

Kompetenzbereich Argumentieren/Kommunizieren

Dr. M. Gercken, 2009



Allgemeine Kompetenz: Mathematisch Kommunizieren/Mathematisch Argumentieren

Der Zusammenhang zwischen dem Mathematischen Argumentieren und dem Mathematischen Kommunizieren ist je nach Lesart unterschiedlich. Während in einigen Bundesländern, Ländern und der Literatur (mehr oder weniger) streng unterschieden wird, kommt es in anderen Teilen zu einer Verschmelzung. Da die Kompetenzen Kommunizieren und Argumentieren sich nicht voneinander trennen lassen, sondern sich mehr als die meisten anderen Kompetenzen durchdringen, wird im Folgenden auf eine strenge Trennung verzichtet.

Man beachte aber, dass in den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss der Kultusministerkonferenz sehr wohl zwischen den allgemeinen mathematischen Kompetenzen Kommunizieren und Argumentieren unterschieden wird.

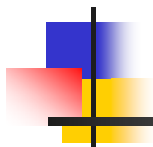
Wesentlich ist, dass beim Argumentieren im Gegensatz zum Kommunizieren der externe Adressat fehlt. Die Sprache ist also wesentlicher Bestandteil - dies gilt nicht nur, aber auch für das Kennen und Anwenden können der mathematischen Fachsprache, denn diese ist auch beim reinen Verständnis eines mathematischen Textes notwendig. Weil aber beim Argumentieren auch mathematische Aussagen miteinander verknüpft und daraus neue Aussagen gefolgert werden müssen, ist auch hier die Fachsprache nahezu unverzichtbar. Trotz der Trennung der Kompetenzbereiche, die wie gezeigt möglich ist, sieht man schon die Nähe des Mathematischen Argumentierens und Kommunizierens.

In den Bildungsstandards Baden-Württemberg ist das Kommunizieren einer der vier überfachlichen Kompetenzbereiche (Lernen, Begründen, Problemlösen, Kommunizieren), das Argumentieren kommt in den kompletten Mathematikstandards (inklusive der Kursstufenstandards) nur einmal vor - innerhalb der Beschreibung des Kompetenzbereichs des Kommunizierens:

Kompetenzbereich Kommunizieren

- mathematische Sachverhalte mithilfe von Sprache, Bildern und Symbolen beschreiben und veranschaulichen;
- in mathematischen Kontexten argumentieren und systematisch begründen
- mathematische Dialoge führen; auf Einwände eingehen und Gegenargumente entwickeln
- Lern- und Arbeitsergebnisse verständlich und übersichtlich in schriftlicher und mündlicher Form präsentieren

aus: Bildungsstandards Mathematik Baden-Württemberg (2004), Kompetenzbereich Problemlösen Kommunizieren



Das Kommunizieren beinhaltet das Lesen und Verstehen mathematischer Texte sowie das Wiedergeben, Darstellen und Erläutern solcher Sachverhalte, von Überlegungen, Folgerungen und Ergebnissen; das Argumentieren beinhaltet das Begründen, Beweisen, Überprüfen, Widerlegen von mathematischen Sachverhalten in vielfältiger Weise.

Anforderungsbereiche mit Beispielen

Allen Anforderungsbereichen I, II, III werden folgende grundlegenden Eigenschaften unabhängig vom jeweiligen Kompetenzbereich zugeschrieben:

Allgemeine mathematische Kompetenzen

Anforderungsbereich I: Reproduzieren

Dieser Anforderungsbereich umfasst die Wiedergabe und direkte Anwendung von grundlegenden Begriffen, Sätzen und Verfahren in einem abgegrenzten Gebiet und einem wiederholenden Zusammenhang.

Anforderungsbereich II: Zusammenhänge herstellen

Dieser Anforderungsbereich umfasst das Bearbeiten bekannter Sachverhalte, indem Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten verknüpft werden, die in der Auseinandersetzung mit Mathematik auf verschiedenen Gebieten erworben wurden.

Anforderungsbereich III: Verallgemeinern und Reflektieren

Dieser Anforderungsbereich umfasst das Bearbeiten komplexer Gegebenheiten u. a. mit dem Ziel, zu eigenen Problemformulierungen, Lösungen, Begründungen, Folgerungen, Interpretationen oder Wertungen zu gelangen.

aus: Anforderungsbereiche der allgemeinen mathematischen Kompetenzen, KMK-Standards für den Mittleren Bildungsabschluss (2004)



Kompetenzbeschreibung in drei Anforderungsniveaus

In Bezug auf das Argumentieren und Kommunizieren können die allgemeinen Anforderungen weiter ausdifferenziert werden.

Argumentieren und Kommunizieren:

Anforderungsbereich I: Routineargumentation, Wiedergeben und Anwenden bekannter Sätze, Verfahren, einfache rechnerische Begründungen, Alltagswissen zum Begründen anwenden;

Darstellen einfacher Sachverhalte, Erkennen und Auswählen relevanter Informationen aus einfachen, kurzen mathematischen Texten, deren Informationen in der Reihenfolge der zu bearbeitenden Schritte geordnet sind.

Anforderungsbereich II: Überschaubare mehrschrittige Argumentation nachvollziehen / erläutern / entwickeln, überschaubare Zusammenhänge erläutern; verständliche mehrschrittige Darstellung von Lösungswegen, Äußerungen zu mathematischen Texten interpretieren und auf Wahrheitsgehalt prüfen, Identifikation und Auswahl von Informationen aus mathematischen Texten, deren Informationen nicht zwingend in der Reihenfolge der notwendigen Bearbeitung geordnet sind.

Anforderungsbereich III: Komplexe Argumentation nutzen/erläutern/entwickeln, verschiedene Argumente hinsichtlich Reichweite/Schlüssigkeit bewerten, für die Mathematik charakteristische Fragen wie "Warum sind dies alle Fälle, die ...?" stellen, Vermutungen äußern und diese begründen; Entwickeln einer vollständigen, kohärenten Präsentation eines komplexen Lösungs- oder Argumentationsprozesses (mündlich wie schriftlich), komplexen Texten relevante Informationen entnehmen, Äußerungen anderer vergleichen/bewerten.

Unterrichtliche Umsetzung

Um Kompetenzen wie das Argumentieren und Kommunizieren aufzubauen, zu sichern oder abzufragen, gibt es eine Vielzahl von Möglichkeiten der unterrichtlichen Umsetzung. Neben dem Frontalunterricht und Unterrichtsgespräch bieten sich insbesondere zum Üben, Festigen und Wiederholen Partner- und auch Gruppenarbeit an (Kompetenzbereich Kommunikation, wenn die Argumentationsbasis der Schülerinnen und Schüler hinreichend breit und gefestigt ist), entdeckendes Lernen (Argumentieren, Begründen) sowie Wechsel der Kommunikationsprozesse (Schülerinnen/Schüler übernehmen zeitweise den Unterricht, Gruppenpuzzle, Tutorensystem). Neben der Bewertungskomponente der Fähigkeit der mündlichen Ausdrucksfähig-



keit kann in schriftlichen Leistungen auch der Kompetenzerwerb hinsichtlich mathematischen Argumentierens und Kommunizierens bewertet werden (mathematischer Aufsatz, schriftlich festgehaltene Argumentation – nicht nur in Stichworten!).

Das Argumentieren wird oftmals in engem Zusammenhang mit dem Begründen und Beweisen gesehen. So weisen die KMK-Standards in der Beschreibung des Kompetenzbereiches „Argumentieren“ folgende Kompetenzformulierungen aus:

- Fragen stellen, die für die Mathematik charakteristisch sind („Gibt es ...?“, „Wie verändert sich...?“, „Ist das immer so ...?“) und Vermutungen begründet äußern
- mathematische Argumentationen entwickeln (wie Erläuterungen, Begründungen, Beweise)
- Lösungswege beschreiben und begründen.

Neben der vernetzenden Nähe zu anderen Kompetenzbereichen kann das Argumentieren also auch als Vorform des Beweisens angesehen werden. Dem Argumentieren kommt also eine didaktische Rolle beim Erlernen des streng-formalen Beweisens in der Mathematik zu.

Zur Vorbereitung auf das Begründen und Beweisen kommt dem Argumentieren (und auch dem Kommunizieren) auch eine gewichtige Rolle beim Erlernen und Verwenden der mathematischen Fachsprache zu. Der Begriff der Fachsprache wird in den Kompetenzbereichen nicht explizit genannt, wohnt aber den Kompetenzen natürlich inne. Das Erlernen und richtige, situationsbezogene Anwenden der mathematischen Fachsprache muss in geeigneten Lernsituationen auf den Weg gebracht werden. In der Literatur findet sich diesbezüglich eine Reihe von Anregungen.

Aufgabenbeispiele

Aufgabenbeispiel 1:

Wahr oder falsch? Eine Summe ganzer Zahlen kann negativ sein.

Kommentar: Dieser Aufgabentyp kann sich spiralcurricular in nahezu jedem Themengebiet wieder finden. Vernetzend mit dem Kompetenzbereich „Begründen“ kann zunächst verdeutlicht werden, dass ein Beispiel ausreicht um zu zeigen, dass das Ergebnis negativ sein kann. Andernfalls reicht ein Beispiel einer nicht negativen Summe nicht aus um die Aussage als falsch zu erkennen.

Aufgabenbeispiel 2:

Hat eine quadratische Gleichung immer entweder keine oder zwei Lösungen?

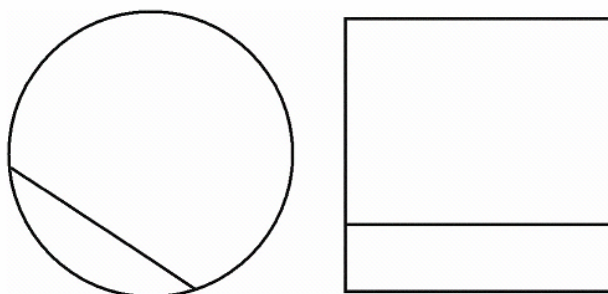
Kommentar: Mittels Angabe eines Gegenbeispiels kann die Frage beantwortet werden, das Arbeiten an der Aufgabe muss damit natürlich nicht abgeschlossen sein. Das Umformulie-



ren der Vermutung am Beginn des entsprechenden Abschnitts – in Zusammenhang mit der Begründung und dem Beweis derselben kann zum Gegenstand gemacht werden. Die Rolle von Beispielen darf an dieser Stelle weder über- noch unterschätzt werden. Auch Veranschaulichungen am Graphen zu algebraischen Sachverhalten treten an dieser Stelle auf, die Argumentation ersetzt jedoch nicht den Beweis.

Aufgabenbeispiel 3: „Dreiecke in einer Figur“

Ergänze einen weiteren Punkt C auf dem Kreis bzw. auf dem Quadrat so, Dreieck mit rechtem Winkel bei C entsteht. Begründe dein Vorgehen.



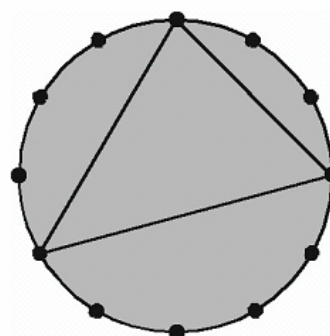
Quelle: Bildungsstandards Mathematik: Konkret, Cornelsen Scriptor (2006)

Kommentar: Eine schriftlich eingeforderte Begründung erhöht das Reflexionsniveau des vorangegangenen Treibens von Mathematik. Auch bei der Verwendung dynamischer Geometriesysteme (eventuell sogar mit einem eingebauten „Beweiser“, der die Konstruktion anhand vieler verschiedener Startbedingungen testet und so - Spezialfälle ausgenommen - eine allgemeingültige Aussage über die Rechtwinkligkeit des entstehenden Dreiecks ableitet) wird der Schüler aufgefordert, die Richtigkeit seiner Konstruktion zwingend zu überdenken und argumentativ zu kommunizieren.

Aufgabenbeispiel 4: Dreiecke im Kreis

Spanne das Gummiband so, dass möglichst viele verschiedene Dreiecke entstehen.

Zeichne die entstehenden Dreiecke ab, sammle sie, untersuche ihre Winkel und sortiere sie nach Gruppen. Stelle möglichst viele Vermutungen auf. Überprüfe und begründe sie, wenn möglich.



Quelle: Bildungsstandards Mathematik: Konkret, Cornelsen Scriptor (2006)

Aufgabenbeispiel 5: Summen von Nachbarzahlen

Jette behauptet: „Die Summe von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist stets durch drei teilbar.“

Hat Jette recht? Begründe deine Antwort.

Quelle: Bildungsstandards Mathematik: Konkret, Cornelsen Scriptor (2006)

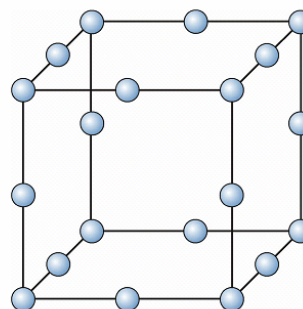


Aufgabenbeispiel 6:

Verbindungsstäbe

Aus Kugeln und Verbindungsstäben werden – wie in der Abbildung dargestellt – Würfel gebaut. Bei drei Kugeln auf einer Kante ergibt sich eine Gesamtzahl von 20 Kugeln.

Werner sagt: „Eigentlich müssten es doch 36 Kugeln sein; denn $12 \cdot 3 = 36$.“ Was meinst du dazu?



Quelle: Bildungsstandards Mathematik: Konkret, Cornelsen Scriptor (2006)

Kommentar: Der Umgang mit Fehlern kann vor allem in Gruppen- oder Partnerarbeit beim Erwerb nicht nur von sozialen Kompetenzen hilfreich sein. Das Aufdecken von Fehlern und das Aufzeigen richtiger Lösungswege kann mit Aufgaben der beschriebenen Art unterstützt werden.

Aufgabenbeispiel 7:

Subtraktionsaufgabe

Schreibe eine Subtraktionsaufgabe und benutze die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 und 6 genau einmal.

- a) Wie lautet das kleinste Ergebnis, das du so erreichen kannst?
Warum ist es das größte?
- b) Wie lautet das kleinste Ergebnis, dass du so erreichen kannst?
Warum ist es das kleinste?

-		

Quelle: Büchter, Leuders, „Mathematikaufgaben selbst entwickeln“, Cornelsen Scriptor (2005).

Kommentar: Insbesondere bei Aufgaben, bei denen eine symbolische oder operative Begründung ungleich schwieriger beziehungsweise aufwändiger wäre, lohnt es sich den Weg des verbalen Begründens zu gehen. Der Lerneffekt ist ungleich höher – die Kompetenz des Argumentierens wird auf diese Weise gefördert.

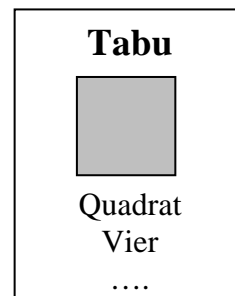
Aufgabenbeispiel 8 :

Tabu

Beschreibe die dargestellten Formen ohne die Verwendung der auf der Karte angegebenen Begriffe.

Kommentar: Dieser Aufgabentyp erlaubt mit gewissen Freiräumen in Bezug auf fachsprachliche Genauigkeit das Einüben von Beschreibungen, die mittels Kenntnissen und Erkenntnissen über vorliegende geometrische Objekte abgegeben werden.

Die Erstellung weiterer Begriffe kann auch als Hausaufgabe, Projekt-





*arbeit oder erweiterte Hausarbeit in Schülerhand gelegt werden.
Dabei muss man sich nicht nur auf geometrische Objekte beschränken. In der Physik ist dieses „Spiel“ bereits weit verbreitet.*

Literaturhinweise (Auswahl):

- ✚ IQB-Implementationsaufgaben für Mathematik Sek I (aus "Bildungsstandards Mathematik: Konkret - Aufgabenbeispiele, Unterrichts Anregungen, Fortbildungsideen", Cornelsen Scriptor (2006) unter www.iqb.hu-berlin.de/bista/aufbsp/masek1.com
- ✚ Mathematik lehren, Heft 156 (2009), „Mathematische Sprache entwickeln“, Friedrich Verlag
- ✚ PM - Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 24 (6/2008), „Sprichst du Mathe? Kommunizieren in und mit Mathematik“, Aulis-Verlag
- ✚ PM - Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 5 (5/2005), „Ich schreibe, also denk´ ich - Über Mathematik schreiben“, Aulis Verlag
- ✚ Büchter, Leuders, „Mathematikaufgaben selbst entwickeln“, Cornelsen Scriptor (2005).
- ✚ Schmidt-Thieme, B., „Fachsprachenkompetenzen und Lehrer(aus)bildung“, in: Vorträge auf der 39. Tagung für Didaktik der Mathematik (2005), Franzbecker Verlag
- ✚ Schmidt-Thieme, B., „Unmathematisches Argumentieren im Mathematikunterricht“, in: Vorträge auf der 40. Tagung für Didaktik der Mathematik (2006), Franzbecker Verlag

Quellen:

Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss (Jahrgangsstufe 10) unter http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschlusse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf