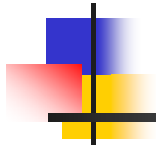




Kompetenzorientierte Aufgaben

Kompetenzbereich Problemlösen

Dr. M. Gercken, 2009



„Das Problem ist die Lücke zwischen dem Ort, wo Du bist, und dem Ort, wo Du hinwillst.“ (Hayes)

Allgemeine Kompetenz: Problemlösen

Das Problemlösen im Sinne der Bildungsstandards ist dann zu leisten, wenn es mathematische Fragestellungen gibt, deren Antwort sich nicht unmittelbar erschließt. Die Bildungsstandards Baden-Württemberg und die KMK-Standards (Mittlerer Bildungsabschluss) weisen dazu die in den unten stehenden Abbildungen genannten Kompetenzen aus.

Problemlösen

- problemhaltige Aspekte in inner- und außermathematischen Situationen erkennen und beschreiben
- Hilfsmittel und Informationsquellen wie Formelsammlung, Lexika, Taschenrechner, Computerprogramme, Internet sachgemäß nutzen
- Problemlösetechniken, -strategie und Heuristiken kennen, anwenden und neuen Situationen anpassen
- das eigene Denken beim Problemlösen kontrollieren, reflektieren und bewerten und so neues Wissen aufbauen

aus: Bildungsstandards Mathematik Baden-Württemberg (2004), Kompetenzbereich Problemlösen

Probleme mathematisch lösen

Dazu gehört:

- vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten,
- geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien zum Problemlösen auswählen und anwenden,
- die Plausibilität der Ergebnisse überprüfen sowie das Finden von Lösungsideen und die Lösungswege reflektieren

aus: Allgemeine mathematische Kompetenz Problemlösen in den KMK-Standards für den Mittleren Bildungsabschluss (2004).



Der Themenkreis des Problemlösens ist (wie so oft) unzertrennlich mit anderen Kompetenzbereichen und verschiedenen Leitideen zugeordneten Kompetenzen verknüpft, so wird man bei außermathematischen Kontexten stets die Kompetenz des Modellierens hinzuziehen müssen.

Beinhaltet das Problemlösen die Anwendung verschiedener Strategien, deren Auswahl (im Vorhinein) und die kritische Reflexion (im Nachhinein), so werden diese Prozesse nicht ohne Kompetenzen aus dem Bereich Argumentieren (zum Beispiel das Aufstellen einer Vermutung) und dem Bereich Kommunizieren (Erfassen der Situation, kritische Reflexion) ablaufen können. Im Folgenden wird auf diesen Umstand nicht immer in aller Schärfe eingegangen, sollte aber stets im Blick behalten werden, wenn es um diagnostische Aspekte im Mathematikunterricht geht.

Strategien des Problemlösens

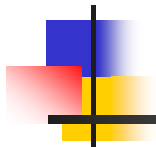
Bei der Frage nach Strategien im Bereich des Problemlösens kommt man an der Arbeit von George Polya (1945) nicht vorbei. Die vier wesentlichen Schritte in der Antwort auf die Frage "Wie man ein Problem löst" lassen sich kurz zusammenfassen.

Schritt 1: Das Problem verstehen.

- Was ist unbekannt? *oder* Was ist zu zeigen?
- Kann eine Skizze oder Diagramm zum Verständnis des Problems beitragen?
- Kannst du das Problem in eigenen Worten wiedergeben?
- Führe geeignete Schreibweisen ein.
- Können konkrete Zahlenbeispiele helfen das Problem zu verstehen?

Schritt 2: Einen Plan bereitstellen.

- Finde eine Verbindung zwischen dem Gegebenen und dem Gesuchten.
- Kennst du ein verwandtes oder ähnliches Problem? *Ggf.:* Ist die Lösung oder die Lösungsstrategie dieses Problems bekannt?
- Lässt sich das Problem in Teilprobleme zerlegen?
- Scheint das Problem unlösbar zu sein, versuche zu vereinfachen oder Spezialfälle der gegebenen Situation näher zu untersuchen.
- Lasse einen Teil der Bedingungen weg
- Wähle eine geeignete (Teil-)Strategie aus: Heuristisches Arbeiten (guess and check), eine tabellarische Liste erstellen, eine Skizze oder Diagramm anfertigen, Variablen einführen, löse ein vereinfachtes, abgeleitetes Problem, ein Experiment durchführen, Vorwärtsarbeiten, Rückwärtsarbeiten, Systematisches probieren, Standpunktwechsel.



Schritt 3: Bereitgestellten Plan durchführen.

- einen Plan durchführen ist leichter als ihn aufzustellen.
- geduldig sein.
- hartnäckig sein.
- frustrationstolerant sein.
- Prüfe jeden Schritt der Durchführung.
- Ist bei jedem Schritt erkennbar, dass er richtig ist?
- Kannst du jeden bei Schritt beweisen, dass er richtig ist?

Schritt 4: Rückschau halten

- Kannst du das Ergebnis überprüfen?
- Sind alle Schritte der Lösung korrekt?
- Ist das Problem vollständig gelöst?
- Könnte man das Problem auch auf andere Arten lösen? Ist dieser Weg eventuell einfacher?

Mit dieser Übersicht ist nur ein Teil der Aspekte, die Polya anspricht, abgedeckt, bietet allerdings eine gelungene Übersicht und bietet eventuell auch eine Möglichkeit mit Schülerinnen und Schülern über das Problemlösen zu sprechen. Neben einer solchen Übersicht bietet sich auch eine MindMap-Erstellung an.

Anforderungsbereiche:

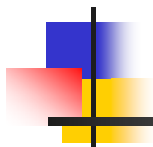
Allen Anforderungsbereichen I, II, III werden folgende grundlegenden Eigenschaften unabhängig vom jeweiligen Kompetenzbereich zugeschrieben:

Anforderungsbereich I: Reproduzieren

Dieser Anforderungsbereich umfasst die Wiedergabe und direkte Anwendung von grundlegenden Begriffen, Sätzen und Verfahren in einem abgegrenzten Gebiet und einem wiederholenden Zusammenhang.

Anforderungsbereich II: Zusammenhänge herstellen

Dieser Anforderungsbereich umfasst das Bearbeiten bekannter Sachverhalte, indem Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten verknüpft werden, die in der Auseinandersetzung mit Mathematik auf verschiedenen Gebieten erworben



wurden.

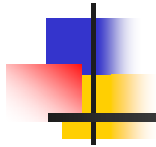
Anforderungsbereich III: Verallgemeinern und Reflektieren

Dieser Anforderungsbereich umfasst das Bearbeiten komplexer Gegebenheiten u. a. mit dem Ziel, zu eigenen Problemformulierungen, Lösungen, Begründungen, Folgerungen, Interpretationen oder Wertungen zu gelangen.

Aus: Beschlüsse der Kultusministerkonferenz - Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss (2004)

Probleme mathematisch lösen		
Dazu gehört:		
Reproduzieren	Zusammenhänge herstellen	Verallgemeinern und Reflektieren
<ul style="list-style-type: none"> - Routineaufgaben lösen („sich zu helfen wissen“) - einfache Probleme mit bekannten - auch experimentellen - Verfahren lösen 	<ul style="list-style-type: none"> - Probleme bearbeiten, deren Lösung die Anwendung von heuristischen Hilfsmitteln, Strategien und Prinzipien erfordert - Probleme selbst formulieren - die Plausibilität von Ergebnissen überprüfen 	<ul style="list-style-type: none"> - anspruchsvolle Probleme bearbeiten - das Finden von Lösungsideen und die Lösungswege reflektieren

Bemerkung: Der Begriff der „Routineaufgaben“ im Bereich des Reproduzierens in den KMK-Standards ist im Sinne der Bildungsstandards so zu verstehen, dass bzgl. des Problemlösens erkannt wird, dass eine Problemaufgabe auf etwas bereits Bekanntes zurückzuführen ist



Aus: Beschlüsse der Kultusministerkonferenz - Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss (2004)

Ein viel versprechender Ansatz zum Lernen vom mathematischen Problemlösen ist der Einsatz von heuristischen Strategien. Nach und nach kann das Handwerkzeug der Schülerinnen und Schüler ausgehend von den allgemeinen Strategien wie zum Beispiel des Vorwärts- und Rückwärtsarbeitens erweitert werden.

Auch hier lässt sich dieses Konzept nur langfristig umsetzen, um die Kompetenz des Problemlösens nachhaltig erwerben zu lassen.

Folgende Übersicht zeigt eine Ansammlung heuristischer Strategien, Prinzipien und Hilfsmittel ohne Anspruch auf Vollständigkeit.

1. Analogien suchen

Beispiele:

- Subtraktion gleichnamiger Brüche \Leftrightarrow Addition gleichnamiger Brüche
- Berechnung der Diagonale eines Quaders
- Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck
- Gegeben: Kugeloberfläche, gesucht: Kugelvolumen \Leftrightarrow Kreisumfang \rightarrow Kreisfläche

2. Sonderfälle betrachten / Vereinfachen

Beispiele:

- a) Satz des Thales: Betrachte zunächst ein gleichschenkliges Dreieck
- b) Satz des Pythagoras: Betrachte zunächst ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck
- c) Volumen der Pyramide: Betrachte zunächst einen Würfel, der in 6 kongruente Pyramiden zerlegt wird

3. In Teilprobleme zerlegen

Beispiele:

- Addieren mit Zehnerübergang (Grundschulbeispiel)
- Flächeninhalte zusammengesetzter Figuren \rightarrow Zerlegung in geometrische Grundfiguren
- Funktionsuntersuchungen
- Abspalten von Faktoren (oder PFZ) (Teilbarkeitsuntersuchungen)
- Auffinden von Parkettierungen



- Herleitung der Formel zur Berechnung des Volumens eines Pyramidenstumpfes → Zerlegen und Ergänzen

4. Vorwärtsarbeiten

Beispiele:

- Aufgaben mit mehreren Schritten
- Begründungsaufgaben in der Teilbarkeit
- Schließen über eine Einheit bei der Proportionalität, speziell beim Prozentrechnen
- In Ergänzung mit Rückwärtsarbeiten beim Beweisen
- Lineare Gleichungssysteme

5. Rückwärtsarbeiten

Beispiel: Claudia nimmt die Hälfte der Murmeln aus einem Sack und behält sie für sich. Dann gibt sie zwei Drittel dieser Murmeln Peter. Sie hatte dann sechs Murmeln übrig. Wie viele Murmeln waren am Anfang im Sack gewesen?

Quelle: Büchter, Leuders: *Mathematikunterricht entwickeln* (Cornelsen Verlag Scriptor)

6. Zufälliges Probieren / Systematisches Probieren

Beispiel: Gesucht sind zwei natürliche Zahlen, deren Produkt 72 und ihre Summe 22 ist.

1. Versuch: $2 \cdot 36 = 72$, $2 + 36 = 38$, Faktor 36 muss verkleinert werden, also:
2. Versuch: $3 \cdot 24 = 72$, $3 + 24 = 27$ ist eine Verbesserung, ...

7. Koordinatisieren

Beispiel: Ein Kind rutscht eine Rutsche in einem Schwimmbad hinunter. Es trifft 1,40m tiefer in 1,90m horizontaler Entfernung auf das Wasser. Wie viel Höhe hat das Kind bereits verloren, wenn es in horizontaler Richtung 1 m von der Rutsche entfernt ist?

Beispiel: Eine zu bauende Bogenbrücke mit oben verlaufender Fahrbahn soll einen Bogen in Form einer Parabel haben – die Brücke habe eine Breite von 100 m und eine Scheitelhöhe von 75 m. Welche Längen haben die so genannten Steher (Verbindungen zwischen Fahrbahn und den darunter liegenden Bögen), wenn diese einen waagerechten Abstand von 10 m haben sollen?



8. Darstellungsform wechseln

Beispiel: Gegeben sind zwei Handytarife: einmal mit Grundgebühr und niedrigen Gesprächsgebühren (5 Euro/Monat bzw. 5 Cent/min), einmal ohne Grundgebühr bei höheren Gesprächskosten (9 Cent./min).

Finde rechnerisch und grafisch heraus, unter welchen Bedingungen welcher Tarif am günstigsten ist.

Beispiel: Zwei Kerzen brennen mit unterschiedlicher Geschwindigkeit ab: Kerze A ist 36 cm lang und brennt mit 3 cm pro Stunde ab, Kerze B ist 10 cm lang und brennt mit 1 cm pro Stunde ab. Wann sind beide Kerzen gleich lang?

Quelle: Büchter, Leuders, „Mathematikaufgaben selbst entwickelt“, Cornelsen Scriptor (2005)

9. Variablen festlegen / Gleichungen bzw. Terme aufstellen

Beispiel: Gesucht sind zwei natürliche Zahlen, deren Produkt 72 ist und ihre Summe 22.

$$x \cdot y = 72, \quad x + y = 22$$

1. Möglichkeit: Gleichungssystem lösen
2. Möglichkeit: Grafische Lösung

Beispiel: Zwei Kerzen brennen mit unterschiedlicher Geschwindigkeit ab: Kerze A ist 36 cm lang und brennt mit 3 cm pro Stunde ab, Kerze B ist 10 cm lang und brennt mit 1 cm pro Stunde ab. Wann sind beide Kerzen gleich lang?

Quelle: Büchter, Leuders, „Mathematikaufgaben selbst entwickelt“, Cornelsen Scriptor (2005)

10. Tabelle, mindmap, Flussdiagramm erstellen

Beispiel: Wie können Vierecke klassifiziert werden?

11. Beziehungen suchen / Beziehungen darstellen

Beispiel: Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Beispiel: Handytarife

Beispiel: Wachstumsarten; lineare und quadratische Abhängigkeiten



12. Hilfslinien einzeichnen

Beispiel: Geometrie; Hilfslinie so einzeichnen, dass ein rechtwinkliges Dreieck entsteht, dass Parallelen vorhanden sind, dass ein gleichschenkliges Dreieck entsteht.

Literaturhinweise & Quellen:

- ✚ IQB-Implementationsaufgaben für Mathematik Sek I (aus "Bildungsstandards Mathematik: Konkret - Aufgabenbeispiele, Unterrichts Anregungen, Fortbildungsideen", Cornelsen Scriptor (2006) unter www.iqb.hu-berlin.de/bista/aufbsp/masek1.com
- ✚ Mathematik lehren Nr. 115 (2002) - Themenheft „Heuristik - Problemlösen lernen“
- ✚ Pólya, G.: *Vom Lösen mathematischer Aufgaben*. Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren. 2 Bände: Birkhäuser Verlag: Basel; Stuttgart 1966.
- ✚ Materialien des BLK-Programms SINUS-Transfer unter www.sinus-transfer.de
- ✚ Büchter, Leuders: „Mathematikaufgaben selbst entwickeln“, Cornelsen Scriptor (2005)
- ✚ Bruder, Leuders, Büchter, *Mathematikunterricht entwickeln*, Cornelsen Scriptor (2008)
- ✚ Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss (Jahrgangsstufe 10) unter http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf