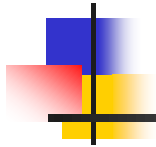




Kompetenzorientierte Aufgaben

Kompetenzbereich Modellieren

Dr. M. Gercken, 2009



Allgemeine Kompetenz: Modellieren

Modellieren ist ein Vorgang, der die Mathematik in irgendeiner Weise mit der Umwelt in Beziehung setzt. Es dient als Hilfsmittel um Probleme und Situationen mathematisch „greifbar“ zu machen. Insbesondere ist es wichtig den Schülerinnen und Schülern nahe zu bringen, dass erst ein geeignetes Modell der Mathematik Leben einhaucht um sie als wirkungsvolles Hilfsmittel und mächtiges Werkzeug in vielen Situationen nutzbar zu machen. Spiralcurricular werden dabei die Anzahl und Komplexität der Probleme, die nach geeigneter Modellbildung lösbar sind, stets größer. Dabei beschränkt sich die Modellbildung nicht nur auf physikalisch oder allgemein naturwissenschaftliche Phänomene, sondern auch auf soziale oder ökonomische Bereiche.

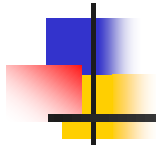
Modellieren im alten Lehrplan (1994) (Unter- und Mittelstufe):

Erziehungs- und Bildungsauftrag, Aufgaben und Ziele: „ ... Die Beschäftigung mit der Mathematik befähigt sie, funktionale Gesetzmäßigkeiten zu erfassen, Modelle der Wirklichkeit zu erstellen und entsprechende Problemlösungen zu erarbeiten. ...“ (Seite 10).

Erziehungs- und Bildungsauftrag, Inhalte und Fächer, Mathematik: „ ... Die exakten Wissenschaften benutzen Fachsprache und Kalküle der Mathematik; in vielen Bereichen menschlichen Denkens ist das Arbeiten mit mathematischen Modellen der Wirklichkeit unverzichtbar. Mathematik schafft somit Voraussetzungen für die geistige Orientierung und Urteilsfähigkeit in einer komplexen Welt. Der Unterricht muß den Schülerinnen und Schülern ein echtes Erlebnis von Mathematik, von ihrer Tragweite und von ihrem Beziehungsreichtum vermitteln.“ (Seite 28).

Modellieren im alten Lehrplan (1994) (Kurstufe des Gymnasiums):

Weg von „Mathematik als Produkt: Im vorgegebenen Modell arbeiten“ hin zu „Mathematik als Prozess: Realität modellieren“ (Seite 190)



LPE 4, Mathematik in der Praxis: Anwendungen der Differenzial- und Integralrechnung: „Insbesondere werden sie sich der einzelnen Schritte des Modellierens bewusst: Problembeschreibung, mathematische Modellierung, Durchführung der Modellrechnung, Interpretation, Modellkritik.“, „Projektorientiertes Arbeiten: W Modellierung“ (Seite 192)

LPE 5, Lineare Gleichungssysteme, Vektoren:

„Lineare Gleichungssysteme in realem Bezug Bei Anwendungen genügt es oft, das LGS mit Hilfe des Rechners zu lösen. Im Vordergrund steht das Modellieren.“ (Seite 193)

Fächer verbindendes Thema 4: Modellbildung

„Modellieren: Analyse des gestellten Problems, Diskussion der notwendigen Idealisierungen, Aufstellung der passenden Größengleichungen, Anpassung der Randbedingungen, Modell-Rechnung, Ergebnisanalyse, Überprüfung der Modellvorstellungen durch Experimente, Diskussion der Grenzen der Modellvorstellungen und deren Beziehung zur Wirklichkeit, Bestätigung, Erweiterung oder Scheitern des Ansatzes“

Modellieren im den neuen Bildungsstandards (2004):

Leitidee Modellieren

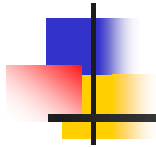
Stufenspezifische Hinweise (Klasse 10)

Durch die Hinzunahme von Fragestellungen aus anderen Fachgebieten werden die Problemlösefähigkeiten erweitert und eine horizontale Vernetzung auch über Fachgrenzen hinaus erzielt. In diesem Zusammenhang gewinnt die Methode der Modellbildung besondere Bedeutung.

Die zunehmende mathematische Kompetenz der Schülerinnen und Schüler gestattet die Bearbeitung komplexerer, realitätsnaher Fragestellungen unter der Leitidee „Modellierung“.

Stufenspezifische Hinweise (Klasse 12)

Die Leitidee „Modellierung“ verbindet auch unterschiedliche Teilgebiete der Mathematik und fördert so die Flexibilität des Denkens.



Bildungsstandards 6, 8, 10 und Kursstufe:
jeweils *Kompetenzen* und *Inhalte* zur **Leitidee „Modellieren“**

Klasse 6 - LEITIDEE „MODELLIEREN“

mithilfe geometrischer Modelle Situationen darstellen und Probleme lösen;
Zahlen und Zahlverknüpfungen zur adäquaten Beschreibung und Untersuchung von Aufgaben in Mathematik und Umwelt einsetzen;
den Dreisatz bei Aufgaben des „bürgerlichen Rechnens“ anwenden;
Ergebnisse sinnvoll runden; durch Schätzen auf Brauchbarkeit überprüfen.

Inhalte

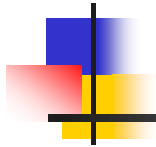
- *Dreisatz; maßstäbliche Darstellungen*

Klasse 8 - LEITIDEE „MODELLIEREN“

inner- und außermathematische Sachverhalte mithilfe von Tabellen, Termen oder Graphen beschreiben und umgekehrt Tabellen, Terme und Graphen in Bezug auf einen Sachverhalt interpretieren;
mit Prozentangaben in vielfältigen und auch komplexen Situationen sicher umgehen;
ein Zufallsexperiment durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung beschreiben.

Inhalte

- *Interpretation von Graphen und einfachen Termen, Aufstellen von Termen*
- *Prozentrechnung*



Klasse 10 - LEITIDEE „MODELLIEREN“

einen Sachverhalt auf angemessene Weise mathematisch beschreiben. Eine zugehörige Problemstellung in dem gewählten mathematischen Modell lösen sowie die Ergebnisse auf die Ausgangssituation übertragen, interpretieren und ihre Gültigkeit prüfen;

Wachstumsvorgänge durch diskrete Modelle beschreiben und simulieren;
das Änderungsverhalten von Größen analytisch beschreiben und interpretieren.

Inhalte

- *Proportionalität; lineares, natürliches, beschränktes Wachstum*
- *Simulation dynamischer Vorgänge; Momentanänderung von Größen*

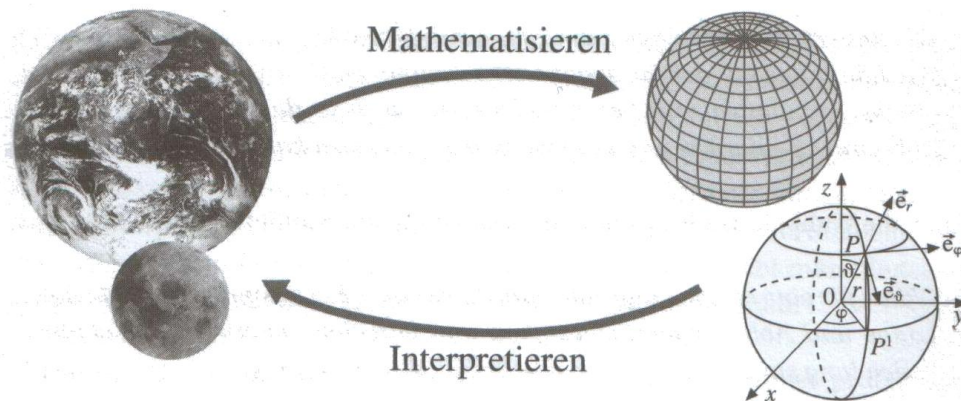
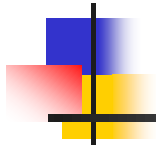
Kurstufe - LEITIDEE „MODELLIEREN“

inner- und außermathematische Sachverhalte und ihre Veränderungen auch in komplexeren Zusammenhängen mathematisch modellieren.

Inhalte

- *Wahl geeigneter Grundobjekte (zum Beispiel Koordinatensystem, Variable); Funktionsanpassung*
- *Differenzialgleichung für natürliches und beschränktes Wachstum, Wachstums- und Zerfallsprozesse (auch logistisches Wachstum)*
- *Anwendungen linearer Gleichungssysteme*

Das folgende Modell beschreibt den Vorgang des Modellierens, insbesondere auch die Rückübersetzung in die Realität, der eine Aufgabe mit Modellierungscharakter entsprungen ist.



© Cornelsen Verlag Scriptor: Mathematikaufgaben selbst entwickeln

Verkürzt lässt sich das Modellieren zwischen dem „Rest der Welt“ und der „Mathematik“ auch durch die Vorgänge „Mathematisieren“ und „Interpretieren“ beschreiben wie in obiger Abbildung dargestellt. Insgesamt würde man damit aber der vollständigen Prozesstiefe des Modellierens nicht gerecht werden. Daher sollte man mögliche Phasen des Modellierens zunächst theoretisch, danach an einem praktischen Beispiel beleuchten.

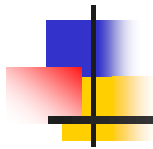
In der ersten Phase der **Strukturierung** kann man den Übergang von der Real-situation zu einem Realmodell verstehen – dies kann in der Vereinfachung, Idealisierung und Auswahl relevanter Informationen bestehen.

Es schließt sich die Phase des **Mathematisierens** an, dabei wird der Schritt der realen Welt in die mathematische Welt vollzogen und ein mathematisches Modell erstellt. Aus der Alltagssprache wird durch eine wie auch immer geartete Transformation mathematische Sprache. Dies kann nicht nur das Aufstellen eines Terms sein, sondern auch eine informative Figur, ein Schaubild etc. sein kann.

Es folgt das **Mathematische Arbeiten** Im Folgenden wird mathematisch gearbeitet: das, was die KMK-Standards mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen nennt, kann in vielfältiger Weise dazu dienen, das modellierte Problem in der mathematischen Welt zu lösen.

Die mathematische Lösung, die man im Idealfall dabei erhält (längst nicht jede Modellierung liefert Resultate), muss nun wieder in die reale Welt zurückübersetzt werden. Und genauso, wie beim Eintritt in die Mathematik Größen und Parameter als mathematische Größen einführen und benennen musste, muss man nun die Lösung übersetzen beziehungsweise **interpretieren**.

Kurz bevor die Schülerinnen und Schüler den Kreislauf des Modellierens wieder zufrieden am Anfangspunkt – also dem realen Problem – ankommen, muss man die



Ergebnisse **validieren**. Dies beinhaltet eine Überprüfung der Bedeutung, der Gültigkeit bis hin zur Genauigkeit des Ergebnisses.

Erst nach Durchlaufen dieses Kreislaufes, den man auch als Helix mit der errichteten Modellierungskompetenz als Ganghöhe, kann abschließend kritisch hinterfragt werden, ob sich das Modell in allen Facetten als geeignet erweist. Dies kann auch beinhalten, ob ein solches Modell sich allgemeiner auf eine ganze Problemklasse erweitert werden kann. In dieser Phase erreichen die Schülerinnen und Schüler eine weitere Kompetenz, wenn sie ihr eigenes Tun reflektieren und bewerten.

Einige Beispiele, die das zuvor geschriebene verdeutlichen sollen.

Aufgabe: Monikas Vater hat fünf Töchter: Lulu, Lala, Lele und Lolo. Wie heißt die fünfte Tochter?

Diese Aufgabe hat offensichtlich keinen tief-mathematischen Hintergrund, sondern entspringt einer der unsäglichen Fernsehgewinnshows, in denen Zuschauer zum Anrufen verleitet werden sollen.

Eignen tut sich diese Aufgabe aber eventuell durchaus, um die Frage der **Strukturierung** bei der Modellbildung (von der Realsituation zum Realmodell) zu beschreiben. Diese Aufgabe ist offensichtlich überbestimmt, denn die Angabe der Namen der vier Töchter Lulu, Lala, ... ist zur Lösung nicht notwendig.

Schülerinnen und Schülern kann man so einsichtig machen, dass stets ein Auge darauf zu haben ist, was zur Lösung eines Problems wirklich beiträgt und was nicht (die fünfte Tochter heißt Monika ...).

Aufgabe: Am Hausmeisterkiosk werden in der großen Pause belegte Brötchen, Obst und Getränke verkauft. Wie groß muss der Vorrat an einem Schultag wohl sein.

Eine unterbestimmte Aufgabe, denn offensichtlich fehlen Angaben um eine wie auch immer geartete, exakte Lösung zu bestimmen.

In vielfältiger Weise kann man hier in der Phase der **Strukturierung** die Realsituation modellieren. Einfach sind die Anzahl potentieller Käufer zu bestimmen (die Anzahl der Schülerinnen und Schüler der Schule), weniger einfach wird es, wenn man die Kaufgewohnheiten der Schülerschaft abschätzen soll.

So können sich interessante Diskussionen entwickeln, die sowohl dem mathematischen als auch den realen Problemcharakter beschreiben. So ist zu diskutieren, ob der Hausmeisterkiosk eher einen zu großen Vorrat anlegt (bei Getränken unproblematisch), bei verderblichen Lebensmitteln etwas kalkuliert etc.



Die Aufgabe lässt sich in offensichtlicher Weise erweitern beziehungsweise durch zusätzliche Angaben steuern.

Aufgabe: Rekordnagel. Um ins Guinnessbuch der Rekorde eingetragen zu werden, will Herr Nagel vor seinem Gasthaus einen überdimensional großen Stahl-nagel als Sonnenuhr aufstellen. Er hat sich schon mal mit dem Computer ein Bild gemacht, wie das aussehen soll.

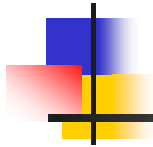
Der Nagel ist etwa 7 m lang und hat einen Durchmesser von etwa 22 cm. Der zum Aufstellen des Nagels zur Verfügung stehende Entladekran des LKW kann maximal eine Masse von 1,5 t heben. (Hinweis: 1 cm³ Stahl wiegt 7,85 g.)



Kann man den Nagel mit diesem LKW aufstellen? Schreibe auf, wie du vorgehst. (© Cornelsen Verlag Scriptor: Bildungsstandards Mathematik: konkret)

Die **Mathematisierung**/Modellbildung läuft hier auf die Annahme hinaus, dass der Nagel annähernd als Zylinder zu modellieren ist. Ist dieser Schritt getan, so schließt sich allgemein das **mathematische Arbeiten** an. Im Speziellen ergibt sich das Volumen des so modellierten Nagels ungefähr zu $V = \pi \cdot (0,11 \text{ m})^2 \cdot 7 \text{ m} \approx 0,266 \text{ m}^3$. Der Nagel wiegt dann ungefähr $0,266 \text{ m}^3 \cdot 7,85 \text{ g/1 cm}^3 \approx 2 \text{ t}$.

Nun ist die Schülerschaft geneigt, das zweimal unterstrichene Ergebnis als verdienten Lohn der Bemühungen anzusehen. Nichts desto Trotz ist auch in diesem einfachen Fall die **Interpretation** der Lösung. Wegen der bestehenden Ungleichung kann der Entladekran also nicht genutzt werden.



Aufgabe: Jemand behauptet „Sindelfingen ist von Weil der Stadt 27 km“ entfernt. Nimm zu dieser Aussage Stellung.

Die Aufgabe kann natürlich in vielerlei Hinsicht variiert werden und legt seinen Schwerpunkt doch stets auf den letzten Schritt im zuvor skizzierten Modellierungskreislauf diskutiert werden – den der **Validierung**.

Eine kritische Reflexion schließt eine erfolgreiche Modellierung erst ab. In diesem Fall wäre also das Ergebnis auf Realitätsgehalt zu prüfen und liefert prompt eine Auflösung eines weit verbreiteten Irrtums, der sich mithilfe eines Routenplaners oder Kartenmaterial auflösen lässt. Hier zeigen sich also Möglichkeiten aufzuzeigen, wie trotz eines vollständigen Durchlaufs einer Modellierung ein Widerspruch zur Realsituation für Schülerinnen und Schüler sehr nachvollziehbar wird.

Dies findet sich allgemein in den Bildungsstandards in der Leitidee „Modellieren“ spiralcurricular wieder. In den Standards 10 findet sich dazu die Kompetenz

„einen Sachverhalt auf angemessene Weise mathematisch beschreiben, Eine zugehörige Problemstellung in dem gewählten mathematischen Modell lösen sowie die Ergebnisse auf die Ausgangssituation übertragen, interpretieren und ihre Gültigkeit prüfen“,

die in den Standards der Kursstufe zu

„inner- und außermathematische Sachverhalte [...] auch in komplexen Zusammenhängen mathematisch modellieren.“

erweitert werden.



© 2007 Cornelsen Verlag Scriptor – Mathematisches Modellieren



Modellierungsaufgaben muss man mit dem Blick auf die Kompetenzorientierung keineswegs neu erfinden – es gibt eine Vielzahl von Sammlungen, Ideen und theoretischen Betrachtungen zum Modellieren. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit seien einige an dieser Stelle genannt.

- + IQB-Implementationsaufgaben für Mathematik Sek I (aus "Bildungsstandards Mathematik: Konkret - Aufgabenbeispiele, Unterrichts Anregungen, Fortbildungsideen", Cornelsen Scriptor (2006) unter www.iqb.hu-berlin.de/bista/aufbsp/masek1.com
- + Schriftenreihe der ISTRON-Gruppe: „Materialien für einen realitätsbezogenen Unterricht“ (ISTRON 1993-2004)
- + Materialien des BLK-Programms SINUS-Transfer unter www.sinus-transfer.de
- + Büchter, Leuders: „Mathematikaufgaben selbst entwickeln“, Cornelsen Scriptor (2005)
- + Maaß: „Mathematisches Modellieren“, Cornelsen Scriptor (2007)
- + Materialien des Mathematik-Unterrichts-Einheiten-Datei e.V. unter www.mued.de
- + Mathematik lehren 113/2002 – Themenheft „Modellieren“
- + Praxis Mathematikunterricht 3/2005 – Themenheft „Modellieren“

Modellieren ist in verschiedenen Rahmenlehr- und Bildungsplänen teilweise als Leitidee verankert, teilweise als allgemeine mathematische Kompetenz ausgewiesen – Letzteres trifft wohl eher den Kern dessen, was mathematisches Modellieren ausmacht.

Das „Modellieren“ hängt mit dem „Problemlösen“ in folgender wechselseitiger Art und Weise zusammen. So kann man das Problemlösen in außermathematischen Situationen kurz als Modellieren oder als *Problemlösen im weiteren Sinne* bezeichnen. Handelt es sich von vornherein um eine innermathematische Aufgabe, deren Lösungsverfahren nicht offensichtlich ist, so spricht man von *Problemlösen im engeren Sinne* (obwohl es zu Verwirrungen führen könnte, hat man durchaus das Recht von *innermathematischem Modellieren* oder *Modellieren im weiteren Sinne* zu sprechen).

Wie das Modellieren auch unterzieht man dem Problemlösen einer Validierung (vgl. Bildungsstandards, überfachlicher Kompetenzbereich „Problemlösen“:

„das eigene Denken beim Problemlösen kontrollieren, reflektieren und bewerten und so neues Wissen aufbauen“