**Beurteilende Statistik**

**Wahrscheinlichkeitsrechnung** und **Beurteilende Statistik** - was ist der Unterschied zwischen den beiden Bereichen?

In der **Wahrscheinlichkeitstheorie** werden aus gegebenen Wahrscheinlichkeiten andere Wahrscheinlichkeiten berechnet, in der **Statistik** werden aus Beobachtungen Wahrscheinlichkeiten geschätzt.

Dies soll am Beispiel „Werfen einer Münze“ verdeutlicht werden:

Wenn bekannt ist, mit welcher Wahrscheinlichkeit p bei einer Münze Zahl fällt, kann man die Wahrscheinlichkeit eines vorgegebenen Ereignisses berechnen.

In der Praxis ist jedoch p oft nicht bekannt. Man müsste die Münze so lange werfen, bis sich die relative Häufigkeit für Zahl hinreichend stabilisiert hat. Da dies aber sehr zeitaufwendig ist, gibt es eine andere Methode. Man vergleicht die Münze mit einer idealen Münze (bei der beide Seiten die gleiche Wahrscheinlichkeit haben).

Bei einer idealen Münze ist beispielsweise die Wahrscheinlichkeit, dass bei 50 Würfen weniger als 15mal oder öfter als 35mal Zahl auftritt, ungefähr 0,0026, also etwa nur 0,26%.

Zum Vergleich dazu wirft man die vorgelegte Münze 50mal. Tritt dabei Zahl weniger als 15mal oder öfter als 35mal auf, so gibt es zwei Möglichkeiten der Interpretation:  
1. Die Münze ist in Wirklichkeit ideal, das Ergebnis ist durch Zufall so unwahrscheinlich.  
2. Die Münze ist nicht ideal und man erhält dieses Ergebnis, weil bei ihr für die Wahrscheinlichkeit   
 p für Zahl (p<0,5 oder p>0,5) gilt.

|  |
| --- |
| In der **Beurteilenden Statistik** versucht man, aus den bei mehrmaligen Durchführungen eines Zufallsexperimentes aufgetretenen Ergebnissen auf die unbekannte, dem Zufallsexperiment tatsächlich zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsverteilung zu schließen. |

Festlegung einer Zufallsvariablen X:   
X=0 sei Zahl, d.h. P(X=0) = p und X=1 sei Wappen, d.h. P(X=1) = q = 1-p.  
Die Münze wird n-mal geworfen, es wird jedes Mal das Ergebnis notiert.  
Ein einzelnes beobachtetes Ergebnis heißt **Realisierung von X**,   
jede einzelne Realisierung heißt **Stichprobenwert.**Die gesamten Beobachtungsergebnisse bilden eine **Stichprobe vom Umfang n.**

**Testen von Hypothesen**

**Was ist ein Test?**

Ein **Test** ist ein Verfahren, mit dem man anhand von Beobachtungen eine begründete Entscheidung über die Gültigkeit oder Ungültigkeit einer Vermutung trifft. **Hypothesen** sind Annahmen bzw. Vermutungen über Zusammenhänge von interessierenden Sachverhalten.

Im Mathematikunterricht ist eine **Hypothese**  eine Vermutung über die (unbekannte) Treffer-Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bzw. Stichprobenerfebnisses. In einem Test werden zwei Hypothesen gegeneinander ausgespielt: Die **Nullhypothese** und die  **Gegenhypothese** oder **Alternativhypothese.** Man wählt i.a. als Alternativhypothese das, was man vermutet und bestätigt haben will und als Nullhypothese das, was abgelehnt werden soll.Hypothesen der Form H: p=p0 (die durch genau einen Wert festgelegt sind) heißen **einfache** Hypothesen, Hypothesen der Form pp0 heißen **zusammengesetzte** Hypothesen.  
 In einem **Test** soll geprüft werden, ob die Hypothese, die man gemacht hat, zutreffend ist oder nicht. Dazu macht man ein Experiment und stellt fest, ob die Beobachtungen mit der Hypothese vereinbar sind oder nicht. Man kann dabei wie bei allen Problemen in der Statistik keine 100%ige Aussage über die Wahrheit einer Hypothese machen, sondern nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit.  
Die Nullhypothese wird überprüft und der Ablehnungsbereich für den Extremfall bestimmt.

**Durchführung eines Tests:**

p ist die unbekannte WS für ein bestimmtes Ereignis E.

H ist die zulässige Hypothese, die Menge aller Werte, die p annehmen kann

H0 :p=p0 ist die **Nullhypothese**, dies ist eine ausgezeichnete Teilmenge von H  
 (Wert(e), die man für p vermutet).

H1 ist die **Gegenhypothese** oder auch Alternativ-Hypothese mit H1 = H \ H0

Beispiele von Hypothesen:  
 Zwei einfache Hypothesen: H0: p=p0 und H1: p=p1 (Alternativtest)  
 Zusammengesetzte, ungerichtete Hypothesen: H0 : p=p0 und H1: pp0 (Zweiseitiger Test)  
 Zusammengesetzte, gerichtete Hypothesen: H0 : p=p0 und H1: pp0 (Linksseitiger Test)   
 Zusammengesetzte, gerichtete Hypothesen: H0 : p=p0 und H1: p>p0 (Rechtsseitiger Test)

X ist die Zufallsvariable dafür, wie oft das Ereignis E, über dessen Wahrscheinlichkeit eine   
 Aussage gemacht werden soll, bei n Zufallsexperimenten eintritt.   
 X nimmt Werte aus M = {0,1,2,...,n} an und ist dann .

K Die Menge der Werte von X, bei deren Eintreten H0 nicht abgelehnt wird.   
: **Ablehnungsbereich** von H0 , d.h. die Menge der Werte von X,   
 bei deren Eintreten H0 abgelehnt wird



**Entscheidungsregel**: Wie wählt man den Ablehnungsbereich  bzw. den Nichtablehnungsbereich K für H0?

XK : H0 wird nicht abgelehnt

X: H0 wird abgelehnt

Dabei gibt es folgende Möglichkeiten:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Annahme von H0 | Ablehnung von H0 |
| H0 wahr | Richtig | Falsch (**Fehler 1. Art**) |
| H0 falsch, d.h. H1 wahr | Falsch (**Fehler 2. Art**) | Richtig |

**Fehler 1. Art**: H0 wird abgelehnt, obwohl H0 wahr ist   
**Risiko 1. Art**: Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art = P (X) =   
**Fehler 2. Art**: H0 wird angenommen, obwohl H0 falsch ist.  
**Risiko 2. Art**: Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art = P (XK) =

Falls das Risiko 1. Art höchstens gleich einer vorgegebenen Zahl sein soll,   
so heißt **Irrtumswahrscheinlichkeit .** Die Irrtumswahrscheinlichkeit ist also die Wahrscheinlichkeit, mit der man die Hypothese H0 verwirft, obwohl sie wahr ist. Sie gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der das Stichprobenergebnis im Ablehnungsbereich liegt, und beträgt daher höchstens .  
Die maximale Irrtumswahrscheinlichkeit heißt **Signifikanzniveau.**

Fehler 1. Art: Unter der Annahme, dass H0 gilt, bestimmt den Verwerfungsbereich.  
Fehler 2. Art: Unter der Annahme, dass H1 gilt, bestimmt den Annahmebereich der Alternative.  
Beide Fehler beurteilen die Qualität eines Tests. 

1. Die **Entscheidungsregel** ist **vorgegeben**, d.h. K und  sind bekannt:  
   Je größer K gewählt wird, desto kleiner ist das Risiko 1. Art, da man bei großem K die wahre Hypothese H0 (H0 ist wahr beim Risiko 1. Art) nur selten ablehnen wird.  
   Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1.Art ist also gering.   
   Dagegen wird bei großem K für H0 das Risiko zweiter Art groß, da die wahre Hypothese H1 (H1 ist wahr beim Risiko 2. Art) nur selten angenommen wird.  
   Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art ist also groß.
2. Die **Entscheidungsregel** ist **nicht vorgegeben**, d.h. K und  sind nicht bekannt:  
   K und  werden dann festgelegt durch die Vorgabe der **Irrtumswahrscheinlichkei**t ,   
   d.h. das Risiko 1.Art soll höchstens gleich  sein.

**P(X) ** ( bzw. P(XK) >  = 1 - ) unter der Voraussetzung, dass H0 wahr ist

Dabei kann man das Signifikanzniveau wählen:

Entscheidet man sich für das 5% - Niveau und ist , dann muss man H0 verwerfen.   
Ist , so wird man in der Regel H0 nicht verwerfen.

Allerdings ist ein -Wert zwischen 5% und 10% noch „verdächtig“.

Die Annahme oder Ablehnung von H0 bedeutet nicht, dass H0 wahr oder falsch ist, sondern nur, dass diese Entscheidung unter den gegebenen Umständen die zweckmäßigste war.

Man unterscheidet zwei Arten von Tests:

1. **Signifikanztest**

Bei diesem Test entscheidet man über nur eine Hypothese, ob diese wahr oder falsch ist.

Dabei gibt es drei Typen:

1. H0 : p=p0 oder H1: pp0 **zweiseitiger Test**
2. H0 : p=p0 oder H1: p<p0 **einseitiger und einfacher (linksseitiger) Test**H0 : p=p0 oder H1: p>p0 **einseitiger und einfacher (rechtsseitiger) Test**
3. H0 : pp0 oder H1: p>p0 oder

H0 : pp0 oder H1: p<p0 **einseitiger und zusammengesetzter Test**

Risiko 1. Art = P (X) (es wird jeweils p=p0 verwendet)

Risiko 2. Art = P(XK) (i.a. nicht berechenbar, denn falls beim Signifikanztest H1 wahr ist, so hat man für p keinen festen Wert zur Verfügung und kann deshalb das Risiko 2. Art i.a. nicht berechnen, es sei denn, es sind ein oder mehrere Werte von p dafür vorgegeben.)

1. **Alternativtest:**

Bei diesem Test entscheidet man sich zwischen zwei Hypothesen.

H0 : p=p0 oder H1: p=p1

Risiko 1. Art = P (X) (p=p0 muss bei der Berechnung verwendet werden)

Risiko 2. Art = P(XK) (p=p1 muss bei der Berechnung verwendet werden)

**Beispiele:**

1. **Einseitiger (rechtsseitiger) Signifikanztest**Bei einem idealen Würfel ist die Wahrscheinlichkeit für „Werfen einer 6“ .  
   Von einem Würfel wird behauptet, dass  gilt.  
   Diese Behauptung ist die Alternative zum Normalfall H0: .  
   Die Nullhypothese H0:  wird geprüft, indem sechsmal gewürfelt wird.  
   H0 wird abgelehnt, wenn deutlich mehr Sechsen fallen als zu erwarten sind.  
   Wie muss eine Entscheidungsregel aussehen, damit das Risiko 1. Art höchstens 10% ist?

H0:  oder H1:   
X sei die Zufallsvariable für die Anzahl der 6en mit den Werten aus M={0,1,2,3,4,5,6}.

Die Zufallvariable X ist B6; - verteilt:  
**1. Entscheidungsregel:**    
 H0 wird nicht abgelehnt, wenn man keine oder eine 6 würfelt

 H0 wird abgelehnt, wenn man 2 oder mehr 6en würfelt.

Risiko 1. Art: P(X) =1 - P(XK) = 1 - (P(X=0) + P(X=1)) 26% > 10%.  
**2. Entscheidungsregel:**    
 H0 wird nicht abgelehnt, wenn man keine, eine oder zwei 6en würfelt

 H0 wird abgelehnt, wenn man 3 und mehr 6en würfelt.

Risiko 1. Art: P(X) =1 - P(XK) = 1 - (P(X=0) + P(X=1)+P(X=2)) 6% < 10%.

Die zweite Entscheidungsregel muss gewählt werden.

1. **Einseitiger (linksseitiger) Signifikanztest**

Bei dem in 1. Beispiel genannten Würfel wird nun behauptet, dass  gilt.  
Diese Behauptung ist die Alternative zum Normalfall H0: .

Die Nullhypothese H0:  wird geprüft, indem 300mal gewürfelt wird.  
 H0:  oder H1: 

Das Signifikanzniveau wird mit 5% vorgegeben.  
Damit die Irrtumswahrscheinlichkeit höchstens 5% beträgt, ist die kleinste Zahl a gesucht mit , bei der also 5% überschritten wird. Dann ist [0;c-1] der Ablehnungsbereich, denn es gilt P(X<a)<5%.  
In diesem Fall ist a=40, der Ablehnungsbereich ist also [0;39]

**Zusammenfassung:**Bei einem **einseitigen Signifikanztest zum Testen einer Nullhypothese H0 : p = p0** mit dem Stichprobenumfang n und dem Signifikanzniveau (der maximalen Irrtumswahrscheinlichkeit)  nimmt man als Testvariable X die Trefferzahl für die Parameter n und p0. X ist dann .

Die Art des Ablehnungsbereichs wird der Alternativhypothese entnommen:  
**H1:p<p0** Es liegt ein **linksseitiger** Test mit Ablehnungsbereich [c-1;n]vor.  
 Den Ablehnungsbereich bestimmt man, indem man aus der Tabelle der   
 kumulierten Wahrscheinlichkeiten von X die kleinste Zahl c heraussucht,   
 für die  (denn dann gilt )  
 Die Irrtumswahrscheinlichkeit (die WS, mit der H0 verworfen wird, obwohl   
 H0 wahr ist), also die Wahrscheinlichkeit für den Ablehnungsbereich   
 (das Risiko 1. Art) berechnet sich durch .

**H1:p<p0** Es liegt ein **linksseitiger** Test mit Ablehnungsbereich [0;c]vor.  
 Die Wahrscheinlichkeit für den Ablehnungsbereich (das Risiko 1. Art)   
 berechnet sich durch  Den Ablehnungsbereich bestimmt man, indem man aus der Tabelle der   
 kumulierten Wahrscheinlichkeiten von X die kleinste Zahl c heraussucht,   
 für die    
 Die Irrtumswahrscheinlichkeit (die WS, mit der H0 verworfen wird, obwohl   
 H0 wahr ist), also Wahrscheinlichkeit für den Ablehnungsbereich   
 (das Risiko 1. Art) berechnet sich durch .

**3. Zweiseitiger Signifikanztest**Eine Urne hat 10 gleichartige Kugeln. Über den Inhalt ist lediglich bekannt, dass jede Kugel entweder schwarz oder weiß ist. Man darf 5 Kugeln ziehen mit Zurücklegen und soll sich entscheiden, ob gleich viele schwarze und weiße Kugeln in der Urne sind oder nicht.  
  
p sei die Wahrscheinlichkeit eine weiße Kugel zu ziehen.  
Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln an: .  
Es gilt die Vermutung, dass die Anzahl der schwarzen und weißen Kugeln gleich sei:  
H0:  oder H1:   
Falls H0 abgelehnt wird, so weiß man nichts über p, außer dass.  
Man wird H0 ablehnen, wenn sich beim Ziehen „zu wenige“ oder „zu viele“ weiße Kugeln ergeben.

**1. Entscheidungsregel:** H0 wird nicht abgelehnt, wenn man 2 oder 3 weiße Kugeln zieht

 H0 wird abgelehnt, wenn man 0,1,4 oder 5 weiße Kugeln zieht.  
**Fehler 1. Art**: H0 wird abgelehnt, obwohl H0 wahr ist.

**Risiko 1. Art** = P() = P(= P(X=0)+P(X=1)+P(X=4)+P(X=5) =  
 1 – (P(X=2)+P(X=3))=0,375.

d.h. mit einer Wahrscheinlichkeit von 37,5% wird H0 abgelehnt, obwohl H0 wahr ist.

**Fehler 2. Art:** H0 wird nicht abgelehnt, obwohl H0 falsch ist.  
 H0:  ist falsch, d.h.    
**Risiko 2. Art:** Das Risiko 2. Art = P muss für **jedes p** berechnet werden.  
 Für p=0 (nur schwarze Kugeln) ist P=0  
 Für p=1 (nur weiße Kugeln) ist P=0  
 Für p=0,1 (eine weiße Kugeln) ist P=0,081  
 Für p=0,2 (zwei weiße Kugeln) ist P=0,256  
 Für p=0,3 (3 weiße Kugeln) ist P=0,441  
 Für p=0,4 (4 weiße Kugeln) ist P=0,576  
 Für p=0,6 (6 weiße Kugeln) ist P=0,576  
 Für p=0,7 (7 weiße Kugeln) ist P=0,441  
 Für p=0,8 (8 weiße Kugeln) ist P=0,256  
 Für p=0,9 (9 weiße Kugeln) ist P=0,081

**2. Entscheidungsregel:** H0 wird nicht abgelehnt, wenn man 1,2,3 oder 4 weiße Kugeln zieht

 H0 wird abgelehnt, wenn man 0 oder 5 weiße Kugeln zieht.  
d.h. H0wird seltener abgelehnt.

**Fehler 1. Art**: H0 wird abgelehnt, obwohl H0 wahr ist.

**Risiko 1. Art** = P() = P(= P(X=0)+P(X=5)=0,0625

d.h. mit einer Wahrscheinlichkeit von 6,25% wird H0 abgelehnt, obwohl H0 wahr ist.

**Fehler 2. Art:** H0 wird nicht abgelehnt, obwohl H0 falsch ist.  
 H0:  ist falsch, d.h. 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| p | Risiko | 2.Art |
| 0 | 0 | 0 |
| 0,1 | 0,4095 | 0,081 |
| 0,2 | 0,672 | 0,256 |
| 0,3 | 0,8295 | 0,441 |
| 0,4 | 0,912 | 0,576 |
| 0,6 | 0,912 | 0,576 |
| 0,7 | 0,8295 | 0,441 |
| 0,8 | 0,672 | 0,256 |
| 0,9 | 0,4095 | 0,081 |
| 1 | 0 | 0 |
|  | 2.Entscheidungs-  regel | 1.Entscheidungs- regel |

Interpretation:  
Falls H0extrem falsch ist, (z.B. p=0,1), so ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art viel kleiner als wenn H0 „nicht so falsch“ ist (z.B. p=0,4); d.h. wenn H0 extrem falsch ist, wird man dies mit dem Test eher bemerken.

**Fazit:**Bei einem Signifikanztest hängt das Risiko zweiter Art von p ab.  
Das Risiko erster Art lässt sich verringern, wenn man H0 nur ablehnt, wenn das Ziehungsergebnis in bedeutsamer „signifikanter“ Weise der Hypothese widerspricht.

1. **Alternativtest**

Eine Urne enthält 10 gleichartige Kugeln. Bekannt ist, dass davon entweder 4 weiß und  
 6 schwarz oder umgekehrt 6 weiß und 4 schwarz sind. Man darf 5 Kugeln mit Zurücklegen ziehen und soll sich dann entscheiden, ob man den Urneninhalt für überwiegend weiß oder überwiegend schwarz hält.

p sei die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen.

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln an: 

Die Nullhypothese sagt, dass es 4 weiße und 6 schwarze Kugeln sind: H0: p=0,4

Die Alternativhypothese sagt, es sind 6 weiße und 4 schwarze: H1: p=0,6

Man wird sich für H0 entscheiden, wenn unter den 5 gezogenen Kugeln mehr schwarze sind und für H1, wenn mehr weiße gezogen werden.

**1. Entscheidungsregel:** H0 wird nicht abgelehnt, wenn man 0,1 oder 2 weiße Kugeln zieht

 H0 wird abgelehnt, wenn man 3,4 oder 5 weiße Kugeln zieht.

**Fehler 1. Art**: H0 wird abgelehnt, obwohl H0 wahr ist.  
 H0: p=0,4 ist die WS, eine weiße Kugel zu ziehen  
 Die Zufallsvariable X ist B10;0,4-verteilt

**Risiko 1. Art** = P() = P(= P(X=3)+P(X=4)+P(X=5) =0,3174

d.h. mit einer Wahrscheinlichkeit von 31,7% wird H0 abgelehnt, obwohl H0 wahr ist.

**Fehler 2. Art:** H0 wird nicht abgelehnt, obwohl H0 falsch ist.  
 H1 ist wahr: p=0,6  
 Die Zufallsvariable X ist B10;0,6-verteilt  
**Risiko 2. Art** = P() = P(= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2) =0,3174

d.h. mit einer Wahrscheinlichkeit von 31,7% wird H1 abgelehnt, obwohl H1wahr ist   
(bzw. H0 nicht abgelehnt, obwohl H0 falsch ist.)

**2. Entscheidungsregel:**Vergrößert man den Nichtablehnungsbereich K für H0 , so wird das Risiko 1. Art kleiner:  
Wählt man beispielsweise K={0,1,2,3},   
so ergibt sich für das Risiko 1. Art (mit p=0,4) P()=0,087   
 und für das Risiko 2 Art (mit p=0,6) P(X < 4 )=0,663  
  
Eine Verringerung des Risikos 1. Art zieht eine Vergrößerung des Risikos 2. Art nach sich.  
Eine Verringerung des Risikos 1. Art heißt, die Wahrscheinlichkeit H0 abzulehnen, obwohl H0 wahr ist, wird geringer. Dafür wird die Wahrscheinlichkeit, H0 nicht abzulehnen, obwohl H0 falsch ist, größer.

**Vorgabe eines Signifikanzniveaus **(z.B. ) **:**Die Irrtumswahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art soll höchstens betragen.  
Bei der 1. Entscheidungsregel ist P=0,3174 > 0,1 ,  
bei der 2. Entscheidungsregel ist P=0,08704 < 0,1 ,  
Also muss man die zweite Entscheidungsregel wählen.