

M	A	T	H	E
A	Z			H
T		P		T
H			G	A
E	H	T	A	M

# Nachhaltigkeit im Mathematikunterricht

## unter besonderer Berücksichtigung der Hattie-Studie

U.Wagner, OHG Tuttlingen, 2014

<b>Inhalt</b>	<b>S.</b>
<b>1 Befund</b>	<b>2</b>
<b>2 Hattie</b>	<b>2</b>
<b>3 Hintergrund</b>	<b>4</b>
<b>4 Konsequenzen</b>	<b>6</b>
<b>5 Erarbeitung, Festigung und erstes Üben</b>	<b>7</b>
<b>6 Verteilen der Übung und des Wissenserwerbs</b>	<b>8</b>
<b>7 Einordnen des Wissens</b>	<b>10</b>
<b>8 Rückblickendes Strukturieren des Wissens</b>	<b>12</b>
<b>9 Systematisches Testen und Evaluieren</b>	<b>14</b>
<b>10 Maßnahmen für Förderbedürftige und Begabte</b>	<b>15</b>
<b>11 Ständiges Wiederaufgreifen und Fortentwickeln</b>	<b>17</b>
<b>12 Isoliertes Üben</b>	<b>19</b>
<b>13 Isoliertes Erarbeiten</b>	<b>22</b>
<b>Fazit: Nichtlineares Unterrichten</b>	<b>25</b>
<b>Literatur</b>	<b>27</b>
<b>Anhang</b>	
<b>A Hattie-Faktoren, relevant für den Matheunterricht</b>	<b>28</b>
<b>B Etwas vereinfachte Statistik für Interessierte</b>	<b>30</b>
<b>C Drei Strukturlegepläne für Klasse 6</b>	<b>31</b>
<b>D Ein Strukturlegeplan für Klasse 8</b>	<b>34</b>

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

## 1 Befund

In den letzten Jahren wird die mangelnde Nachhaltigkeit vermehrt als Kernproblem des Mathematikunterrichts erkannt. Oft wird die Einführung der Bildungsstandards als Grund bzw. als Hauptgrund für dieses Phänomen genannt. Differenzierter ausgedrückt sind die Vorwürfe in diesem Zusammenhang:

- Zu wenig Zeit für Übungen (v.a. im algebraischen Bereich);
- Zu frühes Abstrahieren durch Neuordnung und Vorziehen von Themen (z.B. Irrationalität in Klasse 8);
- Zu starke Ausdünnung der Inhalte und damit Zusammenhanglosigkeit und mangelnde fachliche Tiefe (z.B. bei Gleichungen);
- Zu starker Einsatz des GTR und damit Verlust von händischen Fähigkeiten („Knöpfchen statt Köpfchen“);

Auch die derzeitige Schülergeneration wird als Grund für mangelnde Nachhaltigkeit ins Feld geführt. So sollen Leistungsbereitschaft (was sich z.B. an der Hausaufgabendisziplin bemerkbar mache) und Frustrationstoleranz (was sich z.B. bei schwierigeren Übungen im Unterricht zeige) fehlen. Es scheint auch ein vermehrter Mangel an Abstraktionsfähigkeit bei einer größeren Schülerzahl vorzuliegen und diese Schülerzahl könnte mit zunehmender gymnasialer Übergangsquote noch weiter steigen. Die mangelnde Nachhaltigkeit erscheint vor diesen Hintergründen auch als gesellschaftliches Problem.

Neben diesen Umständen sollte aber auch noch ein dritter Erklärungszeitpunkt für mangelnde Nachhaltigkeit bedacht werden: Wir Lehrer oder genauer: Unser Unterricht.

## 2 Hattie

Wenn es um die Effektivität von Unterricht geht, kann man die Hattie-Studie nicht ignorieren. In diesem Artikel wird an vielen Stellen auf diese Studie Bezug genommen, weshalb hier vorab Verständnis- und Interpretationshilfen gegeben werden.

Der neuseeländische Erziehungswissenschaftler John Hattie führte mit seinem Lehrstuhl eine umfassende Synthese von 800 Meta-Analysen, die auf über 50 000 Studien mit 250 Millionen Lernenden zurückgreifen, durch. Dabei untersuchte er, wie stark verschiedene Faktoren mit den Lernleistungen interagieren. Für 138 dieser Faktoren ermittelte Hattie Effektstärken, die ein Ranking ermöglichen. Darüber hinaus konnte er feststellen, dass die durchschnittlichen Lernleistungen pro Jahr Effektstärken zwischen  $d=0,20$  und  $d=0,40$  (je nach Fach und Alter) aufweisen. Etwa in diesem Bereich siedelt Hattie deshalb „Schulbesuchseffekte“ an. Um einen überdurchschnittlichen Lernerfolg zu erzielen („erwünschte Effekte“) müssen die Effektstärken also über  $d=0,40$  („Umschlagpunkt“) liegen, sind sie sogar größer als  $d=0,60$ , nennt er die Effekte „exzellent“. Etwa zwischen  $d=0,00$  und  $d=0,20$  spricht Hattie von „Entwicklungseffekten“, die (vermutlich) auch ohne Schulbesuch

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

zustände kämen. Negative Effektstärken führen schließlich zu „umkehrenden Effekten“ und damit zu einer Verringerung der Lernleistung.

Die wichtigsten Gesamtergebnisse der Hattie-Studie sind:

- Fast alles steigert die Lernleistung, hat also eine positive Effektstärke. Die Effektstärken sind normalverteilt mit dem Erwartungswert  $d=0,40$ .
- Hattie teilt die Faktoren in sechs Hauptkategorien („Domänen“) ein und stellt fest, dass die Effekte durch die Lehrperson ( $d=0,49$ ) am größten, die durch die Schule ( $d=0,23$ ) am kleinsten sind. Auch der Einfluss der Curricula ( $d=0,45$ ) und der des Unterrichtens ( $d=0,42$ ) liegen über dem Umschlagpunkt. Der Hintergrund und die Dispositionen der Lernenden ( $d=0,40$ ) haben durchschnittlichen Einfluss, das Elternhaus ( $d=0,31$ ) unterdurchschnittlichen. Hatties Konsequenz daraus lautet: „Das Lehrerhandeln macht den Unterschied“. Übergeordnete bildungspolitische und organisatorische Maßnahmen sind allenfalls zweitrangig.

Die wichtigsten Kritikpunkte bzw. Interpretationseinschränkungen sind:

- Einziges Kriterium für den Effekt eines Faktors ist die Lernleistung der Schüler und wie diese beeinflusst wird. Wesentliche Ziele wie Selbständigkeit, Teamfähigkeit, Persönlichkeitsentwicklung, Moralentwicklung usw. bleiben unberücksichtigt, weil sie nicht so exakt wie die Leistung messbar sind.
- Es handelt sich um eine Studie, die sich ausschließlich auf englischsprachige Länder bezieht mit ihren z.T. sehr spezifischen Gegebenheiten (z.B. längere Sommerferien, was zu einem negativen  $d= - 0,09$  führt).
- Bei den Effektstärken handelt es sich um Durchschnittswerte mit z.T. sehr hohen Standardabweichungen, weil über verschiedene Fächer, verschiedene Altersstufen und Schularten gemittelt wird. Hattie führt aus, dass bei vielen entscheidenden Faktoren die Varianz klein ist, dennoch wäre es in vielen Fällen interessant, die Extremwerte und ihr Zustandekommen anzugeben bzw. die Werte für Gymnasium und Mathematik (falls sie existieren). Bei manchen Faktoren ist die Standardabweichung um ein Vielfaches größer als der eigentliche Effekt (Freiarbeit, Offener Unterricht), womit diese Daten nur noch sehr eingeschränkt ernst zu nehmen sind.
- Das letzte Argument wird von manchen Fachleuten noch verschärft: Führt ein kumulatives Verständnis von wissenschaftlicher Forschung zu besseren Ergebnissen? Gewinnt man durch die Anhäufung von Daten stets mehr Sicherheit und durch Mittelwertbildung stets mehr statistische Qualität? Ist nicht auch die Auswahl der Meta-Analysen sehr entscheidend („Wer Müll hineinnimmt, kriegt Müll heraus.“)?
- Eine letzte Kritik bezieht sich auf die weitgehend unberücksichtigten Interdependenzen der einzelnen Faktoren. Hattie selbst gibt an, nur sehr wenige Moderatorvariablen gefunden zu haben, die einem Effekt zugrunde liegen können. Dennoch warnt auch er vor isolierten Betrachtungsweisen und damit Überinterpretationen der einzelnen Effektstärken.

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

Die wichtigsten Einzeldaten und Erläuterungen für Mathematiklehrer sind im Anhang zu finden:

- Ich habe aus den 138 Hattie-Faktoren diejenigen extrahiert, die direkt oder indirekt mit dem Mathematikunterricht zu tun haben. Das Ranking dieser finden Sie in Anhang A. Die meisten der Daten (v.a. die Faktoren mit hohen Effektstärken) werden in diesem Artikel an entsprechender Stelle gewürdigt.
- Im Anhang B findet sich eine mathematische Erläuterung der verschiedenen Kennziffern, mit denen man statistische Effekte ausdrückt.

### 3 Hintergrund

Wer auf größere Nachhaltigkeit beim Lernen abzielt, sollte sich zum Vorgang des Lernens Gedanken machen. Historisch und vereinfacht gesehen folgten drei Lernmodelle aufeinander:

#### Lernen durch Einfüllen („Trichter“)

Man kann das Gehirn mit Wissen und Können auffüllen.

Misserfolg bedeutet dann, dass das Hirn (oder entsprechende Teile) schon „voll“ sind.

Dieses Modell wird heute abgelehnt.

#### Lernen durch Abbilden („Kamera“)

Das Hirn zeichnet sich mit Hilfe der Sinnesorgane ein möglichst getreues Abbild der Realität.

Misserfolg bedeutet dann, dass der Lernstoff entweder nicht genügend häufig und/oder nicht genügend klar dargeboten wurde.

Dieses Modell mag in manchen Mathematikstunden, in denen notwendige einschleifende algorithmische Übungen stattfinden, zielführend sein, greift aber viel zu kurz.

Vor allem im erarbeitenden Unterricht kann es zu folgenden Fehlschlüssen führen:

- Genügend gut und klar gezeichnetes Vorbild garantiert getreues Abbild („Erklärungsideologie“)
- Genügend häufige Wiederholung des Vorbildes wird das getreue Abbild irgendwann erzwingen („Übungsideologie“)

*„Vielfach werden Misserfolge so umgedeutet, dass man noch zu wenig geübt hätte. Es werden weitere Übungsaufgaben gestellt - und damit wird die Sache oft noch schlimmer gemacht.“*

G.Malle

- Fehler sollten vermieden werden, da sie sich sonst ebenfalls einprägen („Fehlervermeidungsideologie“)

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

## Lernen durch Konstruieren („Knüpfen von Netzen“)

Im Hirn findet ein Selbstgestaltungsprozess statt: Es werden ständig Hypothesen gebildet und mit Hilfe der Sinnesorgane verifiziert oder verworfen. Dabei findet stets ein Abgleich und eine Vernetzung mit bereits vorhandenem Wissen statt, das dabei ebenfalls neu strukturiert wird. Dieser Prozess ist sehr individuell und stark gefühlsgesteuert. Die Verarbeitungstiefe hängt wesentlich von der individuell erfahrenen Bedeutsamkeit des Neuen und von sozialen Interaktionen ab.

Misserfolg bedeutet dann, dass das Neue mit dem vorhandenen Wissen nicht zu erschließen ist, die Neustrukturierung und Vernetzung schlägt fehl (dabei kann im Extremfall sogar bereits vorhandenes Wissen „gelöscht“ werden).

Die Lernpsychologie und die moderne Hirnforschung legen dieses Modell nahe.

Hattie weist zurecht darauf hin, dass „es sich beim Konstruktivismus *nicht* um eine Theorie des Lehrens handelt, sondern um eine Theorie des Wissens und der Erkenntnis“. Es ist seines Erachtens falsch, aus dem konstruierenden Hirn auf bestimmte Lehrmethoden zu schließen:

*„Konstruktivismus wird zu oft im Sinn eines schülerzentrierten, forschenden, problem- und aufgabenbasierten Lernens gesehen [...] Es wird gesagt, dass die Rolle der konstruktivistischen Lehrperson vor allem darin liege, Gelegenheiten für einzelne Lernende zu schaffen, dass diese durch eigene Aktivität und durch Reflexion und Austausch von Einfällen mit anderen Lernenden Wissen erwerben und Bedeutung konstruieren können, und all dies mit minimaler korrigierender Intervention verbunden ist. Solche Aussagen sind aber fast das genaue Gegenteil eines erfolgreichen Rezepts für Lehren und Lernen.“ (S. 32)*

An anderer Stelle:

*„Bei Bildung geht es um mehr, als nur den Menschen das Denken zu lehren. Es geht auch darum, den Menschen Dinge nahezubringen, die es wert sind, dass man sie lernt. Gutes Lehren beinhaltet auch das Konstruieren von Erklärungen, das Kritisieren, das Ziehen von Schlussfolgerungen, das Finden von Anwendungen.“ (S. 34)*

Es wäre ein Missverständnis, würde man Hattie so verstehen, dass er vom schüleraktiven Unterricht abrücken wollte, vielmehr will er den inaktiven Lehrer abschaffen:

*„Lehrpersonen müssen direktiv, einflussreich, fürsorglich und aktiv in der Leidenschaft des Lehrens und Lernens engagiert sein.“ (S. 280)*

Hattie wünscht sich also die Lehrperson eher als „Regisseur“ (mit einer durchschnittlichen Effektstärke von  $d=0,59$ ) und weniger als „Moderator“ ( $d=0,23$ ). Und er wünscht sich, dass schüleraktive und lehreraktive Unterrichtsformen kombiniert werden.

M	A	T	H	E
A	Z			H
T		P		T
H			G	A
E	H	T	A	M

## 4 Konsequenzen

Legt man das konstruktivistische Lernmodell zugrunde, so überrascht es nicht dass der entscheidende Parameter für ein erfolgreiches Lernen – gerade auch in Mathematik - die bereichsspezifischen Vorkenntnisse (hier werden  $r \approx 0,7$  bzw.  $d \approx 2$  gemessen) sind. Weder die Begabung ( $r \approx 0,4$  bzw.  $d \approx 0,9$ ) noch die Motivation ( $r \approx 0,2$  bzw.  $d \approx 0,4$ ) haben diese große Bedeutung. Ohne abrufbares Vorwissen und aktive Grundfertigkeiten ist Lernen nicht möglich. Positiv wird dies häufig durch den sogenannten Matthäus-Effekt ausgedrückt: „Denn wer da hat, dem wird gegeben.“ (Mt.13,12)

Die Erarbeitung sollte also gut vorstrukturiert sein (durch Material oder mündlichen Impuls vom Lehrer!). Schüler brauchen eine thematische Orientierung, damit sie dann aktiv lernen können (siehe Kapitel 5).

Der Schüler muss in jeder Phase vom Lehrer begleitet werden und ist auf Feedback ( $d=0,73$ ) angewiesen (siehe Kapitel 9). Findet dieses Feedback während der Phase des Erarbeitens statt, so spricht Hattie von „Formativer Evaluation“ und misst hier eine sensationelle Effektstärke von  $d=0,90$  (Ergebniskontrolle nach der Erarbeitung ist hingegen „summative Evaluation“ und weniger effektiv). Für eine gute Vorstrukturierung und ein angemessenes Feedback ist es nach Hattie wesentlich, dass Lehrer „durch die Augen ihrer Schüler sehen müssen“ (daher der Buchtitel „Visible learning“):

*„Lehrpersonen müssen wahrnehmen, was Lernende denken und wissen, um Bedeutung und sinnstiftende Erfahrungen im Lichte dieses Wissens zu konstruieren. Zudem müssen sie ein kompetentes Wissen und Verständnis vom Stoff ihres Fachs besitzen, um sinnvolles und angemessenes Feedback geben zu können.“ (S. 280)*

Mindestens genauso wichtig, wie eine vom Lehrer begleitete und organisierte Erarbeitung ist das Wachhalten von bereits Erlerntem, nur dann kann es als Vorwissen bei der nächsten Erarbeitung eingesetzt werden. Niemand erreicht flüssiges Wissen durch einmaliges Erarbeiten (Nur Angst- und Schmerzwissen wird so gelernt: Die heiße Herdplatte vergisst man nach einmaliger Berührung nie wieder, dieses Wissen ist aber nicht flexibel einsetzbar. Es würde auch keinen Sinn machen, mit der Hand auf der Herdplatte länger darüber nachzudenken, in welche Richtung man sie wegziehen sollte.). Die Konsequenz scheint in vielen Unterrichten eine Vielzahl von aneinandergereihten Übungen zu sein (oben bereits als „Übungsideologie“ genannt). Dass dieses Vorgehen dem Lernen abträglich ist, hat unter anderen auch Hattie nachgewiesen. Rhythmisiertes vs. geballtes Unterrichten hat die enorme Effektstärke  $d=0,71$  und meint einerseits ein verteiltes Üben (und damit Wiederholen), andererseits auch ein verteiltes Erarbeiten bei bestimmten Sachverhalten (siehe Kapitel 11). Auch die Lernpsychologie und Hirnforschung bestätigen die Notwendigkeit von Verteilen und Wiederholen für ein erfolgreiches

M	A	T	H	E
A	z			H
T		P		T
H			G	A
E	H	T	A	M

Lernen. Die Speicherung erfolgt zunächst einige Sekunden im Ultrakurzzeitgedächtnis. Eine sofortige Wiederholung ist also sinnvoll.

Ins Kurzzeitgedächtnis kommt das Wissen nach einer weiteren Wiederholung im Abstand von ca. 15 Minuten. Wird nach ca. einem Tag wiederholt, erreicht das Neue das Langzeitgedächtnis. Dauerhaft abrufbar wird es aber erst, wenn weitere Wiederholungen nach Tagen und Wochen stattfinden. Diese für überschaubare Wissensseinheiten genannte Regel ist in noch schärferer Form für komplexere Zusammenhänge gültig. Eine Wiederholung in immer größeren Abständen ist unerlässlich dafür, dass sich Wissen auch „setzen“ kann.

Dieser letzte Aspekt ist nicht zuletzt deshalb von Bedeutung, weil die Lerntempi in einer Gymnasialklasse um einen Faktor 3 variieren. Lernen im gleichen Tempo ist v.a. bei komplexeren Sachverhalten unmöglich. Auch die Begabungsunterschiede sind (nicht erst nach Wegfall der Verbindlichkeit der Grundschulempfehlung) erheblich. Diesen Umständen muss man Rechnung tragen, indem man auch durch Tests Fähigkeitsunterschiede feststellt (siehe Kapitel 9). Diese Evaluationen dürfen aber kein Selbstzweck sein, sondern müssen münden in Maßnahmen für Förderbedürftige und für Begabte (siehe Kapitel 10).

## 5 Erarbeitung, Festigung und erstes Üben

Die Erarbeitung von Sachverhalten wurde schon sehr häufig in Fortbildungen thematisiert und diese sind nach Hattie sehr effektiv ( $d=0,62$ ), zumal hier nur ein indirekter Zusammenhang mit den Schülerleistungen vorliegt.

Problematisch an den zahlreichen Fortbildungen zum Thema könnte allerdings sein, dass die Wirkung der Erarbeitung insgesamt überschätzt wird und dass zumeist die schüleraktivierenden Methoden betont und dadurch vielleicht auch überbetont wurden.

Deshalb wird in diesem Kapitel nur kurz mit Hinweis auf Hattie-Daten auf die Erarbeitung eingegangen.

Für das nachhaltige Erlernen des Stoffs ist die Art der Erarbeitung durchaus wichtig. Sie wird neben den eigentlichen Inhalten „mitgespeichert“. So ist es z.B. durch Vergleich von chinesischen und westlichen Erwachsenen gelungen nachzuweisen, dass beim Erlernen von Zahlen das Zählen mit den Fingern stets „mitschwingt“: Chinesische Erwachsene brauchen bei Zahlvergleichen erst bei der Zahl 11, westliche Erwachsene schon bei der Zahl 6 etwas länger. Dies ist darauf zurückzuführen, dass das Zählen in China bis 10 mit einer Hand erfolgt, wir aber schon bei 6 auf die zweite Hand wechseln.

Wann immer es möglich ist, sollte die Erarbeitungsphase einprägsam gestaltet werden. Manch-mal gelingt sogar die Etablierung einer Wiedererkennungshilfe (wie die Finger beim Zählen).

Beim Erarbeiten sollten die Schüler aktiv sein. Mit Hattie plädiere ich aber ausdrücklich dafür, eher schüler- und eher lehreraktives Vorgehen nicht gegeneinander auszuspielen. Eine kognitive Aktivierung im fragend-entwickelnden Unterricht kann ebenso effektiv sein wie ein gegenseitiges Lehren in Gruppen.

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

Man findet bei Hattie folgende Daten, die Effizienz belegen:

- Eher lehreraktiv: Klarheit der Lehrperson (d=0,75), Fallbeispiele (d=0,57), Lautes Denken (d=0,64), Fragenstellen (d=0,46), Klassenführung (d=0,52)
- Eher schüleraktiv: reziprokes Lernen (Schüler lehren Schüler, d=0,74), kooperatives vs. individuelles Lernen (d=0,59), Lernen in Kleingruppen (d=0,49), Kellers personalisiertes Instruktionssystem (Form des Mastery-Learning (d=0,58), ähnlich dem Vorgehen bei Planarbeiten nur mit Zwischentests, d=0,53)

Wie wichtig eine bewusste Methodenwahl und die Beziehung aller beteiligter Personen sind, zeigen die folgenden Werte:

- Lehrstrategien des Lehrers (d=0,60), herausfordernde Ziele (d=0,56), Lerntechniken der Schüler (d=0,59)
- Lehrer-Schüler-Beziehung (d=0,72), Klassenzusammenhalt (d=0,53)

Schließlich sei noch auf folgendes hingewiesen:

- Die Effektstärken für Induktives Vorgehen (d=0,33), Individualisierung (d=0,23), Interne Differenzierung (d=0,16), Programmierte Instruktion (ähnlich dem Vorgehen mit Kompetenzrastern und Lernjobs, d=0,24) und problembasiertes Lernen (d=0,15, nicht zu verwechseln mit Problemlösen (d=0,61), hier wird nichts Neues gelernt, sondern angewendet) sind enttäuschend.
- Die von Hattie als beispielhaft herausgestellte Methode „Direkte Instruktion“ (d=0,59) ist kein fragend-entwickelnder Unterricht, sondern ein Unterrichtsarrangement, das sieben Merkmale aufweist. Sehr vereinfacht ausgedrückt findet hier ein kurzer klarer Impuls des Lehrers statt, anschließend praktizieren die Schüler reziprokes Lernen (s.o) mit Hilfe vorbereiteter Materialien.

In der Kapitelüberschrift werden Erarbeitung, Festigung und erstes Üben gleichzeitig genannt. Dies geschah mit Bedacht, da diese drei Phasen möglichst nicht getrennt betrachtet werden sollten. Vielmehr ist ein Ineinandergreifen dieser Phasen erwünscht. So kann man auch gewährleisten, dass der Schwierigkeits- und Abstraktionsgrad nicht zu schnell gesteigert wird: Das Festigen und Üben muss nicht erst dann beginnen, wenn die allgemeine Formel formuliert ist. Oft ist es umgekehrt sinnvoll, die allgemeine Formel erst durch das Festigen und Üben entstehen zu lassen.



M	A	T	H	E	
A		Z		H	
T			P	T	
H				G	A
E	H	T	A	M	

## 6 Verteilen der Übung und des Wissenserwerbs

Es gehört zu den bekanntesten Tatsachen, dass erlerntes Wissen wiederholt werden muss, um flüssig gehalten zu werden. So musste ich neulich nachsehen, wie man Matrizen invertiert, obwohl ich das im Studium sehr oft gemacht habe. Eine kurze Wiederholungsübung brachte dann aber das ganze Wissen um diese Technik schnell zurück. Die bereits erwähnten lern- und hirnpfysiologischen Erkenntnisse sowie der riesige Effekt von Rhythmisieren vs. geballtem Unterrichten ( $d=0,71$ ) belegen dies eindrucksvoll. Sieht man vom (sehr speziellen) reziproken Unterrichten ( $d=0,74$ ) ab, so ist keine Erarbeitungsmethodik ähnlich effektiv. Darüber hinaus gefährdet man massiv den Erfolg weiteren Erarbeitens, wenn das dazu notwendige Vorwissen nicht wachgehalten wird. Nichts ist wichtiger beim Erarbeiten als das Vorwissen.

Leider werden diese Erkenntnisse gerade im Mathematikunterricht häufig ignoriert oder zumindest nicht konsequent berücksichtigt. Wir müssen von den konsequent in einigen Wochen durchgenommenen, geübten und abgeschlossenen Stoffgebieten wegkommen, die in der nächsten Klassenarbeit geprüft werden und dann Platz machen für ein neues, isoliert betrachtetes Stoffgebiet.

Neben einem durchgängigen Unterrichtsstrang, in dem ständig neues Wissen erarbeitet wird, muss es einen ebenfalls durchgängigen Strang des Wiederholens geben. Stoffgebiete sind dann nie (ganz) abgeschlossen und werden wachgehalten und in verschiedenen Klassenarbeiten geprüft (Der Hirnforscher Manfred Spitzer plädiert sogar dafür, in Klassenarbeiten nie den aktuellen, sondern nur den wiederholten Stoff abzufragen.). Die beiden Unterrichtsstränge des Erarbeitens und Übens sind z.T. bewusst getrennt voneinander („Isoliertes Üben“) oder berühren sich („Bereitstellen von Vorwissen“, „Integriertes Üben“).

Diese Vorgehensweise erfordert eine übergeordnete Planung und eine Kultur des ständigen Wiederaufgreifens, wie sie in Kapitel 11 dargestellt wird. So führt man die geplanten Übungen zunächst nur bis zum Erreichen eines Mindeststandards durch.

Weitere Übungen behält man sich vor, um sie nach Tagen, Wochen oder gar Monaten einzusetzen.

Als eine Steigerung dieses Vorgehens kann man nicht nur Übungen verteilen, sondern sogar ganze oder Teile von Unterrichtsgängen (Hatties oben genannter Effekt von 0,71 bezieht sich ausdrücklich auf verteiltes Üben *und* verteilten Wissenserwerb). Dann findet im zweiten Unterrichtsstrang auch ein ständiges Fortentwickeln von Wissen statt. Konsequenter und sehr ambitionierter wird dieser Ansatz in den Klett-Werken „Mathematikbuch: Lernumgebungen“ dargestellt, wo praktisch alle Unterrichtsgänge verteilt unterrichtet werden. Weniger ambitioniert ist die Kultur des ständigen Fortentwickelns ebenfalls im Kapitel 11 ausgeführt.

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

## 7 Einordnen des Wissens

Eine Klammer zwischen Erarbeitung und Wiederaufgreifen stellt das Einordnen des Wissens dar, weil es gleichermaßen in beiden Phasen stattfinden sollte. Viele der hier genannten Maßnahmen lassen sich nach der Hattie-Terminologie unter „Metakognitive Strategien“ ( $d=0,69$ ) einordnen. Es geht hier also um das Denken auf einer höheren Ebene oder schlicht um das Nachdenken über das Denken.

Das Einordnen des Wissens dient als Merk- und Vernetzungshilfe und zur Fehlervermeidung, wobei die genannten Möglichkeiten sicher weiter ergänzt werden können und Überscheidungen erwünscht sind.

### Merkhilfen:

- Analogisieren: Flächeninhaltberechnungen müssen immer, falls man den Variablen die Einheit Meter zuschreibt, zur Einheit Quadratmeter führen. Flächen, die etwas mit Kreisen zu tun haben, erhalten stets den Faktor  $\pi$ .
- Kontrastieren: Viele Dinge – auch im Alltag – versteht man durch eine direkte Erklärung, um was es sich handelt, nicht vollständig. Oft ist es genauso wichtig auszudrücken, um was es sich nicht handelt. So muss man die quadratischen Gleichungen deutlich mit den linearen (als Rückgriff) und evtl. mit den weiteren Polynomgleichungen (als Vorgriff) kontrastieren. Sonst greifen die Schüler auf Gelerntes zurück zur Lösung der quadratischen Gleichung: Umstellen nach  $x$
- Modularisieren: Es gilt – wann immer möglich - geeignete Kategorien zu bilden. So berechnet man das Volumen aller senkrechten Körper mit Grundfläche mal Höhe, alle spitz zulaufenden Körper haben noch den Vorfaktor ein Drittel. Damit sind alle wesentlichen Volumenformeln zusammengefasst.

### Vernetzung:

- Umkehraufgaben: In der Mathematik sind viele Rechentechniken als Ventil anzusehen: in eine Richtung geht es leicht, in die andere schwer(er). Addieren und Subtrahieren ist ein Beispiel, aber auch Ableiten und Aufleiten. Auch im Sinne des Kontrastierens sollte man früh anfangen, die üblichen Vorwärtsaufgaben mit Rückwärtsaufgaben anzureichern, auch wenn dies einen Vorgriff darstellt. Das Lösen von Gleichungen können viele Schüler nur dann verstehen, wenn sie Gleichungen rückwärts hergestellt haben („Zahlen verstecken“). Erst dann erlebt man, dass beim Gleichung lösen Strich-vor-Punkt-vor-Klammer gilt.
- Aufzeigen von Querbezügen: Das Ausmultiplizieren von Summen und Differenzen (bis hin zu den binomischen Formeln) sollte man auch mit Flächen demonstrieren. Die Pfadregel und die Multiplikation von Brüchen sind auf das Engste durch die „Von-Problematik“ verbunden: Eine Sechszweimal zu werfen hat die Wahrscheinlichkeit ein Sechstel von ein Sechstel.

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

- Vergleich verschiedener Lösungswege: Mir scheint, das Bearbeiten einer Aufgabe auf verschiedene Art und Weise ist eher aus der Mode geraten. Man versucht, den Schülern den einfachsten Weg beizubringen. Aber erstens ist der einfachste Weg des Lehrers sicher nicht für alle Schüler der einfachste und zweitens verhindert man damit ein Nachdenken über den Lösungsweg, was zu den effektivsten metakognitiven Strategien gehört. Drittens kann man z.B. durch Bearbeiten der verschiedenen Möglichkeiten zur Berechnung der Lotfußpunkte bei windschiefen Geraden – ganz nebenbei – einen wiederholenden Durchgang durch weite Teile der analytischen Geometrie realisieren.

### Kontrollmechanismen:

- Abschätzungen: Das Schätzen gehört zu den urmathematischen Fähigkeiten. Wer gut schätzt, hat schon viel verstanden und kann fehlerhafte Ergebnisse aussortieren.
- Plausibilitätsbetrachtungen: Viele Fehler lassen sich vermeiden, indem man sich die (Zwischen-)Ergebnisse plausibel macht. Beim Ausmultiplizieren einer Summe und einer Differenz müssen (zunächst) vier Terme auftreten, zweimal mit „minus“, zweimal mit „plus“. Bei binomischen Formeln mit linearen Klammerinhalten müssen alle Ergebnisterme insgesamt quadratisch sein.
- Rückgriff auf (einfache) Beispiele: Was mit Variablen nicht verstanden wird, kann mit Zahlen erschlossen werden. Oft kommen für Schüler nur zwei Möglichkeiten in Frage: Wird beim ersten Potenzgesetz im Exponenten addiert oder multipliziert? Durch Rückbesinnung auf die Potenz als fortgesetzte Multiplikation (nicht auf eine Formel!) ist das schnell geklärt. In komplexeren Termen kann man Teilterme durch einzelne Variablen oder Zahlen ersetzen, weggelassene Malzeichen oder Klammern wieder einfügen usw.

Insgesamt geht es beim Einordnen des Wissens also darum, sowohl bei der Erarbeitung als auch in Phasen des Wiederaufgreifens Rückgriffe und gelegentlich auch Vorgriffe zu organisieren. Die Kontrollmechanismen müssen ebenso wie Termumformungen geübt werden. Sie gehören zum produktiven Umgang mit Fehlern (auch eine Metastrategie), auf die ich hier noch kurz eingehe.

Eine Erklärung des Fehlers durch den Lehrer kann nur ein erster Schritt sein. Ziel sollte es aber sein, dass die Schüler ihre gemachten Fehler (vom Lehrer genannt oder angestrichen bekommen und) selbst analysieren, um sie schließlich in Zukunft selbst zu entdecken und zu vermeiden.

Auch die gemeinsame Besprechung und Aufdeckung von typischen Fehlern (wie sie auch in vielen Schulbüchern angeboten wird: „Finde den Fehler“) ist nur eine Vorstufe. Viele Schüler sehen – aus nachvollziehbaren Gründen – nur dann Sinn in der Fehlersuche und –analyse, wenn es sich um eigene, persönliche Fehler handelt. Dazu können die Schüler z.B. ein „Fehlervokabelheft“ führen, in das sie links den Fehler und rechts die Analyse notieren.

Eine gute Möglichkeit einer persönlichen Auseinandersetzung mit eigenen Fehlern bietet die

M	A	T	H	E	
A		Z		H	
T			P	T	
H				G	A
E	H	T	A	M	

Klassenarbeitsverbesserung, die ich nach folgendem Muster anfertigen lasse:

- Jeder am Rand markierte Fehler muss vom Schüler selbst (mit Bleistift) kommentiert werden. Der Schüler schreibt also beispielsweise unter das Rf-Zeichen „Punkt-vor-Strich“ (würde ich diesen Kommentar schreiben, hätte der Schüler weit weniger davon).
- Jeder Schüler sucht sich zusätzlich eine Teilaufgabe aus, in der er den aus seiner Sicht ärgerlichsten, weitreichendsten oder vermeidbarsten Fehler gemacht hat und analysiert diesen schriftlich bis ins Detail nach folgendem Muster (die Reihenfolge ist dabei nicht unwichtig, weil zuerst Kontrollmechanismen verlangt werden, bevor die klassische Verbesserung erfolgt):
  - Warum habe ich diesen Fehler gemacht? Was habe ich mir dabei gedacht?
  - Wie kann ich mir klarmachen, dass mein Ergebnis falsch sein muss bzw. dass ein anderes richtig sein muss?
  - Was habe ich genau falsch gemacht? Wie hätte es richtig sein müssen?
  - Wie kann ich diesen Fehler in Zukunft vermeiden?

## 8 Rückblickendes Strukturieren des Wissens

Das rückblickende Strukturieren des Wissens dient dem Überblick über ein Stoffgebiet. Hattie spricht hier von Concept Mapping und sieht darin die Entwicklung graphischer Darstellungen der konzeptuellen Struktur des zu lernenden Stoffs. Die Effektstärke ist mit  $d=0,57$  hoch und unter den Strategien, die Lernintentionen betonen, am höchsten.

Wesentlich hierbei ist, dass

- die Lernenden in die Entwicklung dieses Lernwerkzeugs einbezogen sind (Concept-Maps durch Lernende erstellt:  $d=0,81$ ; Concept-Maps lediglich studiert:  $d=0,37$ ),
- es eingesetzt wird, wenn die Lernenden bereits mit dem Stoff vertraut sind und nicht vor oder während des Lernens selbst, dann spricht man von Advance Organizer (vorangestellte Expertenstruktur,  $d=0,41$ ),
- die wichtigsten Ideen, Themen und Querverbindungen dargestellt sind und somit eine Struktur und Hierarchie der einzelnen Aspekte des Stoffs sichtbar wird.

Es gibt widersprüchliche Erkenntnisse dazu

- wer das Mapping durchführen sollte (Lernende allein, in Gruppen oder mit Hilfe der Lehrperson),
- wer die Begriffe des Maps liefern sollte (Lernende oder Lehrende),
- In allen Fällen ist Concept Mapping aber eine effektive Methode. Sie ist geringfügig besser als das Schreiben einer Kurzfassung durch Lernende. Dem Vortragen und Diskutieren des Themas ist sie aber weit überlegen.

M	A	T	H	E	
A		Z		H	
T			P	T	
H				G	A
E	H	T	A	M	

Das Concept-Mapping setzt man zeitlich gesehen

- am Ende einer Themeneinheit und zu deren Abschluss ein,
- bewusst erst in einem zeitlichen Abstand zur abgeschlossenen Einheit als Element des Wiederholens (z.B. auch in zeitlicher Nähe zu einer Klassenarbeit),
- erst dann ein, wenn die Thematik weitergeführt wird, um das notwendige Vorwissen bereitzustellen und zu strukturieren.

Die einfachste Möglichkeit, ein Concept-Mapping zu realisieren, ist der Strukturlegeplan. Dabei werden die entscheidenden Begriffe des Themas zunächst auf einem Papier oder gar Plakat angeordnet und mit Querverbindungen und Beispielen erläutert und in Beziehung gesetzt.

Drei Beispiele für Klasse 6 sind im Anhang C dargestellt. Neben den eigentlichen Begriffen zum Thema kann es sinnvoll sein, weiteres zu platzieren, wie die beiden Felder „Fehlervermeidung“ und „Tipps/Tricks“ oder mit „Achsenkreuz“ der Hinweis, dass dies auf dem Plakat nicht erscheinen soll. Die Schüler schneiden dann die einzelnen Felder auseinander und beginnen mit der Arbeit.

Die Begriffesammlung kann dabei aber auch auf verschiedene Weisen entstehen:

- Der Lehrer gibt die Begriffe ungeordnet (oder bewusst alphabetisch geordnet) vor, wenn z.B. die Schüler noch ungeübt sind oder Zeit gespart werden soll;
- Die Schüler erarbeiten die Begriffe selbständig, wenn sie schon geübt sind. Eine Hilfe zum zielgerichteten Suchen kann dabei in manchen Fällen die ABC-Methode sein: Zu jedem Buchstaben im Alphabet werden ein oder mehrere Begriff(e) gesucht;
- Der Lehrer gibt einen Teil der Begriffe vor oder Oberbegriffe oder verknüpfende Beispiele oder..., wenn eine gewisse Vertrautheit mit der Methode bereits vorhanden ist.

Bei der Entwicklung des Maps kann man

- die Schüler einzeln arbeiten lassen, wenn es um kleinere oder um Teile von Themengebieten geht. Dies kann z.B. zur selbständigen Gestaltung einer Heftseite geschehen;
- die Schüler in Partner- oder Gruppenarbeit daransetzen, wenn man v.a. auch die Diskussion und den Prozess des Erstellens für fruchtbar hält;
- im Plenum an der Tafel (evtl. mit Magneten) an Pinnwänden, auf dem OHP gemeinsam diskursiv vorgehen, wenn die Klasse noch wenig geübt ist. In einem allerersten Schritt kann es auch sinnvoll sein, ein Beispiel für ein Map durch den Lehrer vorzugeben und nur mit den Schülern zu diskutieren;

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

Auch der Umgang mit den erzeugten Maps kann auf unterschiedliche Weise geschehen:

- die Produkte können als Plakate stumm aber für jeden sichtbar im Klassenzimmer aufgehängt werden,
- die Plakate können von den jeweiligen Erstellern einzeln präsentiert werden,
- die Plakate können mit der Methode „Marktplatz“ gleichzeitig präsentiert und evtl. auch bewertet werden.

Die beiden letzten Möglichkeiten eignen sich insbesondere, wenn an thematisch unterschiedlichen Maps gearbeitet wurde.

Bei der Marktplatzmethode gehen die Schüler herum und lassen sich in kleinen zufälligen Grüppchen das jeweilige Plakat präsentieren. Dies lässt sich realisieren, indem man erst die eine Hälfte der Schüler an ihren Plakaten zur Präsentation belässt, während die andere Hälfte von Plakat zu Plakat geht. Nach einer vorbestimmten Zeit wechseln diese Hälften die Aufgabe. Ein ähnliches Arrangement erhält man, wenn man jede einzelne Gruppe halbiert, die eine Hälfte präsentiert wiederum ihr Plakat, während die andere Gruppenhälfte sich über andere Plakate informiert. Auch hier wird dann selbstverständlich getauscht.

Oft, v.a. bei ungeübten und jüngeren Schülern, ist es sinnvoll, den beobachtenden Gruppen konkrete Aufgaben zu geben, die man auch mit einer Bewertung des Plakats und der Präsentation verbinden kann. Dann gehen die Schüler wie Controller mit Zettel, Stift und sogar Klemmbrett herum und bewerten z.B. nach Übersichtlichkeit, Verständlichkeit, fachlicher Richtigkeit, ansprechender Darstellung, Eingehen auf Fragen usw. Man kann damit auch das jeweils beste Plakat ermitteln, das dann z.B. von DIN A3 auf DIN A4 verkleinert und in Kopie für alle als Handout zur Verfügung gestellt wird.

Eine Warnung: Der Methode Marktplatz ist ein gewisses Chaos und eine gewisse Lautstärke immanent. Man ist als Lehrer disziplinarisch gefordert und in den Nachbarzimmern sollte keine Klassenarbeit stattfinden.

## 9 Systematisches Testen und Evaluieren

Die in der Hattie-Studie ausschließlich einbezogenen angelsächsischen Schulen unterscheiden sich in mancherlei Hinsicht von den deutschsprachigen. Ein durchgängiges Unterscheidungsmerkmal scheint dabei auch das Testen und Evaluieren zu sein, das hier viel systematischer durchgeführt wird, sei es beim Vergleich von Schulen oder im Unterricht selbst. In letzterem ist das Mastery-Learning ( $d=0,58$ ) weit verbreitet. Dabei wird der Stoff in relativ kleine Einheiten zerlegt, mit einem hohen Maß an Kooperation mit den Klassenkameraden und viel Feedback durch die Lehrperson erarbeitet. Jeder kleinen Einheit wird ein diagnostischer Test vorangestellt und es wird sichergestellt, dass die Lernenden erst die notwendigen Vorkenntnisse besitzen, um die nächste Einheit zu verstehen. Mithin kommt es dabei zu einer Vielzahl von Feedbackschleifen.

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

Bei Kellers personalisiertem Instruktionssystem ( $d=0,53$ ) handelt es sich um eine Form des Mastery-Learning, in dem die Lernenden textbasiert arbeiten (ähnlich unserer Planarbeit aber eben angereichert mit Zwischentests).

Ohne das Testen und die „Evaluitis“ zu übertreiben, sollten wir uns manches für unseren Unterricht anschauen. Hattie weist darauf hin, „dass Feedback ( $d=0,73$ ) zu den stärksten Einflüssen auf die Leitung zählt. Die meisten Programme und Methoden, die am besten funktionieren, basieren jeweils auf einer kräftigen Portion Feedback.“ (S. 206). Er führt weiter aus, dass das effektivste Feedback nicht von der Lehrperson an die Lernenden gegeben wird sondern umgekehrt von den Lernenden an die Lehrperson („Lernen sichtbar machen“):

*„Wenn das Feedback jedoch mit einer korrigierenden Durchsicht verbunden wird, werden Unterricht und Feedback miteinander verwoben bis der Prozess selbst die Formen neuen Unterrichtens annimmt, statt die Lernenden lediglich über die Korrektheit zu informieren. Damit Feedback diesen Zweck für das Unterrichten erlangen kann, muss es Informationen bieten, die speziell auf die Aufgabe oder den Prozess des Lernens beziehen, die die Lücke zwischen dem füllen, was verstanden wurde und was verstanden werden soll.“ (S. 207)*

Wird diese Art von Feedback dezidiert während und nicht nach der Erarbeitung praktiziert, so spricht Hattie von „Formativer Evaluation des Unterrichts“ und misst die sagenhafte Effektstärke  $d=0,90$ ! Effektives Feedback beantwortet dabei drei Fragen: Wohin gehst Du? (Feed Up) Wie kommst Du voran? (Feed Back) Wohin geht es danach? (Feed Forward)

Hattie weist auch darauf hin, dass die Taktung von Leistungstests ( $d=0,34$ ) weit weniger effektiv ist. Der Effekt entsteht nicht durch Testen und nochmaliges Testen, sondern durch das Lernen aus dem Testen. Und dieses Lernen ist höher, wenn das Testen durch Feedback begleitet wird. Noch weniger Effekt hat das Test-Training ( $d=0,23$ ), das spezielle Vorbereiten auf Tests. Tests sollten also nie zum Selbstzweck werden.

Von diesen Ideen sollten wir in unseren Unterricht mitnehmen:

- Feedback während der Erarbeitung („formativ“) ist mindestens so wichtig wie Feedback nach der Erarbeitung („summativ“).
- Vor allem in längeren schüleraktiven Phasen sollten (Zwischen-)Tests im Sinne des Mastery-Learning durchgeführt werden.
- Phasen des Wiederaufgreifens dienen dem Auffrischen und der Evaluation. Die Ergebnisse von Tests geben den Schülern Hinweise, was sie können und was sie verbessern sollten, sie geben aber v.a. auch dem Lehrer Hinweise, was er zusätzlich in seinem Unterricht zu tun hat.
- Tests können ebenso wie Hausaufgaben und mathematische Aufsätze auch eingesammelt werden (evtl. auch per Zufall von wenigen Schülern) und dann noch genauer evaluiert und mit Feedback belegt werden.

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

## 10 Maßnahmen für Förderbedürftige und Begabte

Die hier beschriebenen Maßnahmen sind so vielfältig, dass sie eine eigene Fortbildung und einen eigenen Artikel ausfüllen könnten, weshalb hier nur kurz darauf eingegangen wird.

Nimmt man das Testen und die Evaluation ernst, so müssen sich daraus Konsequenzen für den Unterricht ergeben: Was nicht beherrscht wird (und womöglich Voraussetzung für das neu zu Erlernende ist) muss erneut unterrichtlich angegangen werden.

Dabei kann es sein, dass derselbe Stoff von sehr vielen Schülern nicht verstanden wird. Dies erfordert gezielte thematische Maßnahmen für (fast) alle. Oder aber verschiedene Themen werden von wenigen Schülern nicht beherrscht. Diese Schüler sind dann als förderbedürftig erkannt und müssen entsprechende Hilfen erfahren. Bei Hattie rangiert die Effizienz von Intervention für Förderbedürftige sehr hoch:  $d=0,77$

In Mathematik sind die Effekte im allgemeinen geringer (Förderung mathematischer Kompetenzen:  $d=0,45$ ), erreichen aber bei ganz bestimmten Fördermaßnahmen wieder Höchstwerte: Angeleitete Übungen ( $d=0,86$ ), Peer-Tutoring (s.u.,  $d=0,76$ )

Vergessen sollte man an dieser Stelle aber nicht, dass es in Klassen stets Schüler gibt, die mit allen Themen keinerlei Probleme haben und somit als begabt gelten. Auch diese Schüler müssen gemäß ihren Fähigkeiten gefördert werden. Mit Zusatzangeboten für Hochbegabte ( $d=0,39$ ) und mit Förderklassen für Hochbegabte ( $d=0,30$ ) kann man vergleichsweise wenig erreichen, ganz vernachlässigbar sind die Effekte bei leistungshomogener Klassenbildung ( $d=0,12$ ). Weit größere Effekte erreicht man mit Problemlösen (im Sinne Polyas,  $d=0,61$ ), Kreativitätsförderung ( $d=0,65$ , in Mathematik noch effektiver) und v.a. mit Akzeleration (beschleunigter Unterricht,  $d=0,88$ ).

Ein angenehmer Effekt ergibt sich, wenn man Förderbedürftige und Begabte zusammenbringt, die einen erklären die Inhalte den anderen. Zum einen sind dann beide Gruppen beschäftigt, aber was noch schwerer wiegt: Dieses als „Peer-Tutoring“ (Durchschnitt:  $d=0,55$ ) beschriebene Verfahren ist besonders in Mathematik effizient (s.o.). Hattie betont ausdrücklich, dass es sowohl für die Lernenden als auch für die Lehrenden (fast) gleichermaßen positiv wirkt und dass es sich dann besonders entfaltet, wenn es als Ergänzung zur Rolle der Lehrperson verwendet wird und nicht als deren Ersatz.

Es bedarf einiger Vorarbeit, bis ein solches Tutoring funktioniert. Nicht jeder Begabte kann jedem Förderbedürftigen etwas erklären, das muss auch zusammenpassen. Dann ist die Konstellation von sozial und altersmäßig gleich zu gleich aber wesentlich günstiger als ein unsymmetrisches Mentoring ( $d=0,15$ ).



M	A	T	H	E	
A		Z		H	
T			P	T	
H				G	A
E	H	T	A	M	

## 11 Ständiges Wiederaufgreifen und Fortentwickeln des Wissens

Dreh- und Angelpunkt eines nachhaltigen Unterrichts ist das ständige Wiederaufgreifen und Fortentwickeln des Wissens. Wenn das Wiederholen kein bewusstes und konsequent eingesetztes Unterrichtselement ist, sind viele andere Maßnahmen vergeblich. Kein didaktischer Trick, auch eine noch so ausgeklügelte schüleraktive Erarbeitung führt daran vorbei.

Letztlich geht es darum, das viel zitierte Brunersche Spiralprinzip ernst zu nehmen:

Unterrichtsgegenstände werden nur bis zu einem bestimmten Vollständigkeitsgrad behandelt, um sie dann später wieder aufzunehmen und bis zu einer höheren Stufe weiterzuführen. Dabei hat sich das Bild einer Schraubenlinie (oder Spirale) entwickelt und die Idee von den mathematischen Leitideen, die spiralig von Jahr zu Jahr im Niveau vorangetrieben werden.

Wichtig dabei ist aber, dass die einzelnen Schraubenwindungen verbunden bleiben (oder zumindest keine zu großen Abstände bekommen): Das Wiederaufnehmen von Schuljahr zu Schuljahr ist zu wenig, auch innerhalb eines Schuljahres muss an der Spirale gearbeitet werden. Dies gelingt durch zwei Maßnahmen:

- Verteilen der geplanten Übungen zum Thema über längere Zeiträume:  
Die meisten Unterrichtsgänge wird man bis zu einem bestimmten (Zwischen-)Ziel erarbeiten, dann aber die Übungen nicht am Stück durchführen, sondern verteilt auf Tage, Wochen und Monate. Es geht hier also nicht um mehr Übungen, sondern um deren didaktisch sinnvolles Verteilen (vgl. Kapitel 6). Letztlich „zwingt“ ein Verteilen der Übungen den Lehrer auch zu einer ständigen Wiederholung.
- Verteilen mancher Unterrichtsgänge über längere Zeiträume:  
Bei einzelnen Unterrichtsgegenständen ist es sinnvoll, eine komplette zeitliche Dehnung bis zu einem bestimmten (Zwischen-)Ziel vorzunehmen. Hier werden also nicht nur die Übungen, sondern auch die (oder zumindest ein Teil der) Erarbeitung verteilt. Es handelt sich dabei um Themen, die eine ganz neue kognitive Herausforderung für die Schüler darstellen. Ein typisches Beispiel sind die Brüche, ich verteile deren Erarbeitung und Übung auf die beiden ersten Schuljahre. Ein erstes (Zwischen-)Ziel ist dabei, dass jeder Schüler zunächst den Bruchbegriff, die verschiedenen Bruchdarstellungen, das Kürzen und Erweitern versteht. Dies stelle ich mit verteilten Einschüben über das ganze fünfte Schuljahr sicher, weil es sich um Kenntnisse handelt, die sich setzen müssen und die unabdingbare Voraussetzung für das Bruchrechnen sind.

Durch dieses Vorgehen gewinnt man mehrerlei:

- Erarbeitetes Wissen wird wachgehalten.
- Das notwendige Vorwissen für weiteres Erarbeiten wird bereitgestellt.
- Man hält sich automatisch länger mit einfachen, aber tragenden Beispielen und Techniken auf, bevor man (zu) abstrakt wird.

M	A	T	H	E
A	Z			H
T		P		T
H			G	A
E	H	T	A	M

- Man trägt den hirnpfysiologischen und Hattieschen Erkenntnissen Rechnung.
- Man testet und evaluiert ständig, was die Schüler (schon) können und was (noch) nicht. Eine unterrichtliche Reaktion darauf fällt dann weniger schwer („formative Evaluation“).
- Man erreicht ein (angenehmes) Kompetenzgefühl bei den Schülern oder gibt ihnen zumindest Hinweise darauf, was sie nacharbeiten sollten („summative Evaluation“). Beides dient der Motivation ( $d=0,48$ ) und dem Selbstkonzept ( $d=0,43$ ) der Schüler.
- Jede Klasse, die ich so unterrichtet habe, gab mir nach kurzer Zeit mit überwältigender Mehrheit die Rückmeldung, dass sie das Prinzip des Wiederaufgreifens und Fortentwickelns nicht mehr missen möchte (schwieriger ist die Überzeugungsarbeit zuweilen bei Eltern).

Dem Nutzen stehen auch Kosten gegenüber:

- Die Unterrichtsplanung muss langfristiger erfolgen, ein Jahresplan ist sinnvoll.
- Die Realisierung von mehreren Unterrichtssträngen – „normale“ Erarbeitungen, Wiederaufgreifen, Fortentwickeln – erfordert Ausdauer, Konzentration und das Notieren von durchgeführten Wiederholungen und Weiterentwicklungen.
- Das Vorgehen sollte auch Einfluss auf die Hausaufgaben haben:  
Auch hier gelegentlich wiederholende Aufgaben, Tests, eingesammelte (evtl. benotete) Aufgaben durchführen.
- Das Vorgehen muss auch Einfluss auf die Klassenarbeiten haben:  
Auch hier müssen wiederholende Anteile integriert werden und man muss sich bei teilerarbeiteten Gebieten auch mit weniger ausgefeilten Fähigkeiten und weniger anspruchsvollen Zahlenbeispielen zufrieden geben. Von einem Kind das gerade Krabbeln kann, kann man das Gehen nicht verlangen, obwohl das Laufen das Ziel ist.

Das Wiederaufgreifen kann auf zwei Arten geschehen:

- Integriertes Üben:  
Hier wird der aktuelle Stoff mit den zu wiederholenden Elementen verbunden. Dies geschieht mit jeder vernetzenden und jeder anwendungsbezogenen Aufgabe und ist sicher fester Bestandteil in jedem Mathematikunterricht, weshalb hier an dieser Stelle nicht näher darauf eingegangen wird. Ich weise nur darauf hin, dass Vernetzen und Anwenden sinnvoll auch innermathematisch geschehen kann und soll und dass dies nicht nur in größeren Zusammenhängen (oder gar projektartigem Unterricht), sondern auch in kleinem Maßstab (siehe Ideen zur Vernetzung in Kapitel 7) möglich und sinnvoll ist.
- Isoliertes Üben:  
Hier wird isoliert vom aktuellen Unterrichtsgang geübt. Also während einer Geometrieinheit findet das isolierte Üben z.B. dezidiert in Algebra statt und umgekehrt.

Diese Methode ist gleichermaßen wichtig wie unüblich, weshalb ich ihr das ganze folgende Kapitel 12 widme.

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

Das Fortentwickeln von Themen ist etwas schwieriger zu gestalten, geschieht aber auf ganz ähnliche Weise im „Isolierten Erarbeiten“:

Auch hier wird isoliert vom eigentlichen Hauptunterrichtsstrang ein Thema über längere Zeit weiterentwickelt und damit in den Schülerköpfen verankert. Es handelt sich also um ein bewusstes „Nebenbeilernen“, das darauf basiert, dass die Schüler mit kleinen Überforderungsaufgaben konfrontiert werden. Auch dieses Vorgehen wird in dem eigenen Kapitel 13 besprochen.

## 12 Isoliertes Üben

Das Isolierte Üben ist eine wesentliche Methode auf dem Weg zu einem nachhaltigen Wissen und Können. Es folgt der Erkenntnis, dass Gelerntes nur dann behalten wird und als flüssiges Wissen zur Verfügung steht, wenn es in Zeitabständen immer wieder hervorgeholt und geübt wird. Die Tatsache, dass das Wissen isoliert vom aktuellen Unterrichtsgang geübt wird, macht es für die Schüler bedeutsam. Das setzt aber voraus, dass auch die Klassenarbeiten solche wiederholenden Elemente enthalten.

Das isolierte Vorgehen hat noch zwei weitere Gründe: Zum Einen sollen damit gerade auch einzelne Fähigkeiten für sich geübt werden wie z.B. das Lösen einer Gleichung. Zum anderen ist eine didaktisch wünschenswerte Einbettung in aktuelle sinnstiftende Kontexte nicht immer möglich oder zeitlich zu aufwändig. Selbstverständlich sollte diese umfassendere Art des Wiederholens von Zeit zu Zeit (aber wesentlich seltener) zusätzlich stattfinden.

Ebenfalls aufwändiger ist es, wenn man das isolierte Üben in ganzen Stunden oder Doppelstunden oder in umfangreicheren Hausaufgaben unter Einsatz bestimmter Methoden realisiert. Auch dies kann nur selten im Schuljahr erfolgen. Möglichkeiten dazu sind u.a.

- Lernzirkel oder Lerntheken zu einem oder mehreren zurückliegenden Themen
- Fermiaufgaben, komplexere Rätselaufgaben, Open-ended-approach nicht zum aktuellen Thema
- Concept Mapping (s. Kapitel 8)
- Mathematische Aufsätze als längerfristige Hausaufgabe
- Aufgabenproduktion durch Schüler:

Die Schüler erstellen zu einem Thema selbst Aufgaben und schreiben sie auf ein Blatt. Auf der Rückseite notieren sie ihren Namen und den Lösungsweg nebst Lösung. Der Name sollte nicht vorn stehen, da die Aufgaben sonst oft nach Autor ausgesucht werden. Die Blätter werden gesammelt und jeder Schüler holt sich eines, löst es und vergleicht die Lösung anschließend mit der Rückseite. Bei Übereinstimmung wird das Blatt auf einen weiteren Stapel („kontrolliert“) gelegt, bei Diskrepanzen versucht der Schüler eine Einigung mit dem Autor (gelingt dies nicht, dient der Lehrer als Schlichter). Nach mehreren Durchläufen hat man eine Vielzahl von mehrfach kontrollierten Aufgaben und die Schüler haben vorwärts und rückwärts gedacht, haben sich unterhalten, gestritten und im Raum bewegt. Bei geübten Klassen kann man auch mehrere Aufgaben pro Schüler verlangen und sogar eine Abstufung dieser nach „leicht“, „mittel“ und „schwer“.

M	A	T	H	E
A	z			H
T		P		T
H			G	A
E	H	T	A	M

Als durchgängiges Prinzip wird das isolierte Üben am einfachsten als Warm-Up zu Beginn oder als Cool-down am Ende einer Unterrichtsstunde praktiziert.

Man wählt dabei Aufgaben aus, die nicht zum aktuellen Stoffgebiet (gelegentlich auch nicht zum Stoff der aktuellen Klassenstufe) gehören und unabdingbare Fähigkeiten verlangen. Umgekehrt wird den Schülern damit auch verdeutlicht, was eigentlich die unabdingbaren Fähigkeiten sind, die von ihnen verlangt werden und wie gut sie sie beherrschen (Feedback-Kultur und Kompetenzerfahrung). Die Aufgaben sollten einen kleinen zeitlichen Rahmen (5-10, höchstens aber 15 Minuten) umfassen und in möglichst vielen (allen?) Unterrichtsstunden durchgeführt werden. Da es sich um Wiederholungen handelt, werden die Lösungen schnell (allenfalls beispielhaft tiefergehend) behandelt. Optimal ist es, wenn man denjenigen Schülern, die Probleme hatten, Hilfen in schriftlicher Form (z.B. WADI) oder in der nächsten Stillarbeitsphase durch Erklärungen anbieten kann. Haben sehr viele Schüler Schwierigkeiten, ist das ein wertvoller Hinweis darauf, dass man als Lehrer hier zusätzliche Übungen oder Erklärungen planen muss.

Selbstverständlich gibt es auch andere Möglichkeiten, isoliert zu üben. Meine Erfahrungen z.B. mit Karteikarten, die wie in den Fremdsprachen benutzt werden, sind eher zwiespältig. Diese und andere Vorgehensweisen sind mir entweder zu aufwändig oder zu unflexibel oder aber sie sind nicht geeignet, das Prinzip des ständigen Wiederholens in meinem und in den Köpfen der Schüler zu verankern.

In jedem Fall ist anzuraten, dass ähnliche Wiederholungsaufgaben dann auch in den Klassenarbeiten gestellt werden (Oberstufenarbeiten beinhalten bei mir grundsätzlich alle mathematischen Teilgebiete). Außerdem ist es wichtig, erworbene Fähigkeiten wie Kopfrechnen durch geteilte Arbeiten, die unter anderem – wie das Abitur – eine taschenrechnerfreie Bearbeitung verlangen, abzuprüfen.

Das tägliche isolierte Üben kann, mit ein wenig Übung ((-;), ohne großen Aufwand, ja teilweise sogar ohne Vorbereitung in jeder Klassenstufe durchgeführt werden. Der Nutzen vergrößert sich aber enorm, wenn man auch hierfür einen Plan hat, ein zweites Unterrichtsskript neben dem „normalen“ Unterrichten. So nimmt man sich für einen Monat oder bis zur nächsten Klassenarbeit einige Fähigkeiten heraus und trainiert diese gezielt. Andere Fähigkeiten trainiert man über das ganze Schuljahr. Notizen, auch darüber, wie gut die Schüler zurecht kamen (kurze Abfragen helfen), sind hier sehr hilfreich. Diesen Plan nebst Notizen sollte man zumindest dann machen, wenn ähnliche Wiederholungsaufgaben in den Klassenarbeiten gestellt werden. Eine anspruchsvolle Wiederholungsfrage, die im Unterricht sehr lange nicht mehr thematisiert wurde, ist als Klassenarbeitsaufgabe nicht fair.

Man sollte beim täglichen isolierten Üben verschiedene Methoden verwenden, aber gleichzeitig das Ganze auch in einem sich wiederholenden ritualisierten Rahmen durchführen. Mithin sind isolierte Übungen zu Beginn der Stunde ein probates Mittel, um für Ruhe, Konzentration und Einstimmung auf den Unterricht zu sorgen.

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

Die Methoden sind vielfältig:

- Rein mündliche Übungen (z.B. Kopfrechnen, Kopfgeometrie)
- Mündlich gestellte Übungen, die schriftlich gelöst werden (z.B. Aufstellen der Gleichung einer Geraden, die durch zwei gegebene Punkte verläuft)
- Schriftlich gestellte Übungen, die mündlich gelöst werden (Tafel oder OHP, z.B. mehrere einfache, aber variierende Aufgaben zu den Potenzgesetzen)
- Schriftlich gestellte Aufgaben, die schriftlich gelöst werden (z.B. WADI, Kannst-du-das-noch-Aufgaben aus dem Buch )

Auch die Aufgabenformate können und sollen stark variieren:

- „Vokabel“-Aufgaben (z.B. besondere Vierecke und ihre Zusammenhänge)
- Basisroutinen (z.B. Lösen einer quadratischen Gleichung)
- Kopfrechnen (z.B. Kettenrechnungen)
- Kopfgeometrie (z.B. Welche Körper können 18 Ecken haben?)
- GTR-Handling (z.B. Regression durchführen)
- Beschreibe-Aufgaben (z.B. Konstruktion mit Worten beschreiben, evtl. auf Anweisung durchführen, mit allen Fehlern)
- Denkschemata aufbrechen (z.B. Ableiten (auch von Spezialfällen) mit Regelbenennung)
- Bildaufgaben (z.B. Graphen und Fragen nach Eigenschaften, Zugehörigkeit zu einem Funktionstyp usw.)
- Skizzenaufgaben (z.B. Ableitungsgraph oder Graph mit bestimmten Eigenschaften skizzieren)
- Aktuelle Aufgaben (aus Nachrichten, aus Zeitungsartikeln, aus der Werbung)
- Alltagsfragen (z.B. Praktikeraufgabe: 20% Nachlass, Wie hoch stehen 2 Liter pro Quadratmeter?)
- Wer-wird-Millionär-Arrangements (vier Antwortmöglichkeiten), auch verbunden mit Abstimmungen
- Aufgabensequenzen (am besten schwierigkeitsgestaffelt)
- Tabellenaufgaben (z.B. F, f und f' als Spalten und Eintragungen an verschiedenen Stellen)
- Überblicksfragen mit Pfeildiagrammen (z.B. Bruch, Funktion usw. in der Mitte und Pfeile mit verschiedenen Darstellungen)
- Wo-ist-der-Fehler-Aufgaben
- Grenzen aufzeigen (z.B. Alltagsbspe für Rechnen mit neg. Zahlen oder für (anti)proportionale Zuordnungen)
- Schätzaufgaben (z.B. Winkel oder Wahrscheinlichkeiten)
- kontrastierende Aufgaben (z.B. mehrere Gleichungstypen hintereinander)
- Vorteil/Nachteil-Fragen (z.B. die Ebenengleichungen)
- Verschiedene Möglichkeiten-Fragen (z.B. Gleichungssysteme)

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

- Verbindende/Vernetzende Aufgaben (z.B. Prozente mit Körpereigenschaften)
- Offene Aufgaben (z.B. schöne Zahl, Viereckskonstruktionen)
- vernetzende Aufgaben (z.B. Wie viel Prozent der Flächen eines 8-seitigen Prismas sind Seitenflächen?)
- Problemlöseaufgaben (z.B. Entfernung des Horizonts, Was geschieht mit...wenn...?-Aufgaben)
- Mathematische Pointen (z.B. Geburtstagsparadoxon (mit Hilfe),  $12=13$ -Beweis,  $64=65$ -Beweis, Umfang-Paradoxon)
- Geschichtliches und Biographisches (z.B. Gauß-Formel, Pascal-Irrtum)
- Rätselaufgaben (z.B. Gurkenaufgabe, die meisten Teiler)
- Kleine Wettbewerbe (z.B. Rechenkönig)
- Kurztests (auch benotet, mit freiwilliger oder zufälliger Abgabepflicht)
- ...

### 13 Isoliertes Erarbeiten

Das Isolierte Erarbeiten sorgt für eine Verteilung mancher Lerngegenstände über einen längeren Zeitraum. Dieses Vorgehen rüttelt am meisten am üblichen Vorgehen beim Erarbeiten von Unterrichtsinhalten. Es ist dabei aber nicht daran gedacht, alle oder auch nur viele Inhalte auf diese Weise weiterzuentwickeln, sondern nur wenige oder auch nur einen einzigen. Es geht also nicht um eine Abschaffung des üblichen Vorgehens, sondern um eine Ergänzung.

In jeder Klassenstufe kann man ein oder mehrere Themen finden, die sinnvoll innerhalb des Isolierten Übens neben den eigentlichen Unterrichtssträngen entwickelt oder teilentwickelt werden können. Bei diesem „Nebenbeilernen“ wird der Stoff also bewusst auf einen längeren Zeitraum verteilt, wodurch es für die Schüler möglich ist, dass sie sich an das Neue gewöhnen und es sich auch „setzen“ kann, bevor es systematisch im Hauptstrang des Unterrichts thematisiert und im Regelheft vermerkt wird. Für den Lehrer bietet sich dadurch die Gelegenheit, möglichst alle Schüler „mitzunehmen“ und ständig Rückmeldungen über den Wissensstand zu erhalten. Somit bringt der Lehrer die Klasse einerseits durch dosierte „Überforderungsaufgaben“ gezielt voran, andererseits achtet er auch darauf, sie „dort abzuholen, wo sie bereits stehen“. Bei jeder Portion Isolierten Erarbeitens ist der Lehrer somit mehr am Verständnis der Schüler und weniger am objektiven Stofffortschritt interessiert. Er reagiert mit seinen Portionen auf die Schüler und handelt damit im Sinne der Hattie'schen „formativen Evaluation“ ( $d=0,90$ ). Insgesamt wird also eine Entschleunigung des Lernens dadurch vorgenommen, dass man über längere Zeit die entscheidenden Begriffe und Techniken durch bewusst einfache Beispiele festigt, bevor man kompliziertere und abstraktere Überlegungen anstellt.

Das Isolierte Erarbeiten findet wie das Isolierte Üben optimal in Warm-Up (oder Cool-Down)-Phasen statt. Die Gewöhnung der Schüler an ein Isoliertes Üben ist Voraussetzung für ein erfolgreiches Isoliertes Erarbeiten, stellt doch letzteres eine ambitionierte

M	A	T	H	E
A	z			H
T		P		T
H			G	A
Ü	ben	T	A	M

Weiterentwicklung des ersteren dar. Man wird bei Gefallen am Isolierten Erarbeiten fast automatisch auch Elemente des Isolierten Erarbeiten aufnehmen, wenn man das „Nur-Üben“ durch kleinere neuartige „Überforderungsaufgaben“ ergänzt. Dazu gehören z.B. die Entwicklung von Flächeninhaltsformeln besonderer Dreiecke (falls nur Rechtecke bekannt sind) oder aber auch Vorgriffe durch Umkehrung (Wurzel oder Aufleitung). Die Übergänge zwischen Isoliertem Üben und Isoliertem Erarbeiten sind fließend und die Sache bleibt für die Schüler dadurch auch spannend. Es ist gar nicht notwendig, dass immer klar ist, wo eine pure Übung endet und wo eine kleine Neuerarbeitung beginnt.

Im größeren Maßstab sind geeignete Stoffe für das Isolierte Erarbeiten immer dann gegeben, wenn

- es sich um ein Thema handelt, das systematisch nur mit fundierten Basiskenntnissen angegangen werden sollte. Hier ist z.B. das Bruchrechnen in der Unterstufe zu nennen: Bevor die Schüler nicht (über einen längeren Lernzeitraum) die Bedeutung und die verschiedenen Darstellungen von Brüchen, nebst Kürzen und Erweitern, verinnerlicht haben, ist ein systematisches Rechnen mit Brüchen nicht möglich.
- das Thema einen großen Lernschritt oder sogar ein teilweise widersprüchliches Vorgehen zu bereits Gelerntem verlangt. Hier ist das Lösen von quadratischen Gleichungen zu nennen, dass im folgenden ausgeführt wird. Die Schüler lernen eine grundlegend neue Gleichung mit grundlegend neuen möglichen Lösungsmengen und Lösungsarten. Ein bis dahin geübtes Lösen linearer Gleichungen führt hier im Allgemeinen in die Irre.

Das Beispiel quadratische Gleichungen wird hier näher ausgeführt:

Auf dem Weg zur allgemeinen Lösung einer quadratischen Gleichung mit Hilfe der Mitternachtsformel gibt es eine Fülle von speziellen Problemen, die nicht nur viel leichter gelöst werden können, sondern auch sollten. Dazu müssen diese Probleme aber eigenständig und nicht nachrangig behandelt werden und dies führt dann auch zum Verständnis der quadratischen Gleichung „an sich“ und ihrer Unterschiedlichkeit zur linearen Gleichung.

- (1)  $x^2 = 0$
- (2)  $4x^2 = 0$
- (3)  $x^2 - 4 = 0$
- (4)  $x^2 + 4 = 0$
- (5)  $4x^2 - 4 = 0$
- (6)  $4x^2 - 4x = 0$
- (7)  $(x - 4)^2 = 0$
- (8)  $(x - 4)^2 = 4$
- (9)  $x^2 - 4x + 4 = 0$
- (10)  $2x^2 - 8x + 8 = 0$
- (11)  $(x - 4)(x + 2) = 0$
- (12)  $2(x - 4)(x + 2) = 0$

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

Diese Probleme (oder – je nach Intention – z.B. nur (1) bis (8)) bearbeitet man in Warm-Ups so lange, bis dieses Wissen bei möglichst allen Schülern vorhanden ist.

Dazu werden die Aufgaben immer wieder aufgegriffen und variiert, indem die einzelnen Terme auf verschiedenen Seiten der Gleichung auftauchen oder erst zusammengefasst werden müssen und indem andere Zahlen und Koeffizienten verwendet werden. Die Aufgaben werden aber nicht „künstlich“ durch „unangenehme“ Zahlen verkompliziert. Wichtig für das Verständnis sind auch Umkehraufgaben:

- Welche quadratische Gleichung hat die Lösungen  $\pm 3$  ?  
Gibt es mehrere Möglichkeiten?
- Welche quadratische Gleichung hat keine Lösung?
- Welche quadratischen Gleichungen haben stets die Lösung 0 ?
- Welche quadratischen Gleichungen haben genau eine Lösung?

Gleichzeitig kontrastiert man die Aufgaben immer wieder untereinander und mit ähnlichen linearen Gleichungen und wiederholt das Vorgehen hier. Flankierend werden die binomischen Formeln behandelt und vernetzende Überlegungen zu den Nullstellen entsprechender Graphen angestellt. Beides kann systematisch im unterrichtlichen Hauptstrang (auch vorgelagert) oder auch zunächst nebenbei (auch mit dem GTR als Blackbox) behandelt werden. Darüber hinaus gibt es noch weitere gewinnbringende aber nicht zwingend notwendige Verbindungen und Inhalte, die man – je nach Klasse und eigener Präferenz – zusätzlich thematisiert:

- Wurzeln (von Nicht-Quadratzahlen) und die Wurzeltaste
- Der Zusammenhang mit und Kontrast zu (einfachsten) kubischen oder höhergradigen Gleichungen (z.B.  $x^3 - 8 = 0$ )
- Das Lösen einfacher quadratischer Gleichungen mit dem Satz von Vieta

Hat man über Wochen (Monate) „nebenbei“ das Grundwissen bei den Schülern erzeugt, wird dieses systematisiert und auch schriftlich im Regelheft festgehalten. Die anschließende Krönung durch die die Behandlung der allgemeinen quadratischen Gleichung nebst Lösungsformel ist nun nicht nur sehr gut vorbereitet, sondern auch gut motiviert.

Das Festhalten des im Isolierten Erarbeiten Gelernten kann z.B. so geschehen:

- lehreraktiv und zeitsparend durch eine Übersichtsfolie (und Arbeitsblatt), die von den Schülern durch eigene Beispiele ergänzt wird
- schüleraktiv durch eigene Hefteinträge, die in Gruppen erstellt werden
- durch einzelne Schüler, die Übersichtsfolien (und Arbeitsblätter) erstellen und diese referieren (z.B. im Rahmen einer GFS)

Zu guter Letzt bietet es sich natürlich an, nach Erarbeitung der Mitternachtsformel einen Strukturlegeplan (siehe Kapitel 8) mit den Schülern durchzuführen (Bsp siehe Anhang D).



M	A	T	H	E
A	z			H
T		P		T
H			G	A
E	H	T	A	M

## Fazit:

### Nichtlineares Unterrichten

Die Klage über mangelnde Nachhaltigkeit des Unterrichtsstoffes ist so alt wie die Lehre selbst.

Dennoch bleibt festzuhalten, dass die äußeren Umstände des Lernens in den letzten Jahren nicht besser geworden sind. So gibt es z.B. Hinweise darauf, dass die Fähigkeit zum Erkennen von Termstrukturen eng mit dem räumlichen Vorstellungsvermögen zusammenhängt. Die entscheidenden Grundlagen dazu werden im Vorschulalter durch Bewegung im Raum (Spielen, Toben, ein flacher Bildschirm ist hier kein Ersatz) gelegt. Hierbei mangelt es vielen Kindern heutzutage.

Auch ist der Einfluss des täglichen Computereinsatzes evtl. gerade im Fach Mathematik gravierend: Die Konzentration auf eine regelgerechte und zielgerichtete algebraische Umformung wird durch den Rückstellbutton und die damit verbundenen Try-and-error-Mentalität konterkariert.

Verschlechterte Rahmenbedingungen werden teilweise auch den Bildungsstandards zugeschrieben, v.a. dann, wenn man am vormaligen Unterrichten festhält. Mangelnde Nachhaltigkeit ist nicht zuerst ein Problem von „zu wenig“ Übungszeit (v.a. wenn sich „zu wenig“ an einem durchaus durchgeführten exzessiven Üben bemisst; meine Nachhilfeschülerin musste z.B. nach Einführung des Dreisatzes 32 (!) gleichartige Aufgaben hintereinander rechnen). Meiner Ansicht nach erfordert auch das Vorziehen von Stoffen und das frühe Abstrahieren zumindest partiell ein Umdenken. Vieles kann (zunächst) beispielhaft ohne tiefe Abstraktion und fachliche Exaktheit angegangen und im Sinne eines Spiralprinzips dann schrittweise (über längere Zeiträume) im Niveau angehoben werden. Negative Einflüsse auf die Nachhaltigkeit mathematischen Könnens könnten auch durch die fachliche Ausdünnung und den GTR-Einsatzes entstehen.

Nimmt man eine Vielzahl der Empfehlungen dieses Artikels ernst und berücksichtigt man v.a. die erwähnten lernpsychologischen Gegebenheiten und die Ergebnisse der Hattie-Studie, so kann man zu meinem Gesamtkonzept des **Nichtlinearen Lernens** kommen.

Der Name soll v.a. die deutliche Abgrenzung von einem linearen Lernen (im Sinne des „Trichterfüllens“ im immergleichen Tempo: Der Zuwachs von Fähigkeiten wächst linear mit der Zeit) signalisieren, ohne dabei zu unterstellen, jemand unterrichtet heute noch so.

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

Das sind die Unterschiede:

- Nichtlinearität heißt bewusste Beschleunigung und Entschleunigung. Was die Schüler schon können oder wissen, kann schnell (auch wenn das Buch viele Seiten und Übungen vorsieht) behandelt werden. Themen, die eine ganz neue kognitive Herausforderung bedeuten (wie z.B. die Bruchrechnung), werden in Erarbeitung und Festigung über längere Zeiträume verteilt. Dabei wird v.a. viel Zeit in verständnisaufbauende Übungen mit einfachen Beispielen und Aufgaben gelegt.
- Lernen erfolgt nie linear, sondern ist vielmehr von konstanten Phasen („Ich blick das einfach nicht!“) Sprüngen („Heureka“) und Brüchen („Ich verstehe das ohne die Hinführung!“) gekennzeichnet.
- Nichtlinearität bedeutet, bewusst mehrere Unterrichtsstränge gleichzeitig zu realisieren. Neben dem eigentlichen aktuellen Unterrichtsstoff finden stets Wiederaufgreifen von bewusst anderen Themen statt (bei mir mindestens ein Viertel der Unterrichtszeit). Darüberhinaus gibt es auch immer Themen, die „nebenbei“ gelernt werden, ohne auf Hefteinträge und Fachstruktur bzw. –terminologie zu achten. So lernen meine Schüler den Umgang mit bewusst einfachen Brüchen (verschiedene Darstellungen, Erweitern, Kürzen, Addieren) nebenbei spielerisch während der ganzen Klasse fünf, ohne dies im Regelheft zu notieren. Dies wird in Klasse sechs ebenso wie die Fachtermini selbständig nachgeholt.
- Nichtlinearität heißt bewusstes Vor- und Zurückgreifen. Etwas Unverstandenes kann man durch weiteres Üben nicht verständlich machen, man muss noch einmal in die Erarbeitungsphase und zu einfachen (Zahlen-)Beispielen zurückkehren, auch wenn dies schon Jahre zurückliegt. Genauso wichtig ist es, bei neuen Themen auf das Alte zurückzugreifen und dieses nutzbar zu machen. Damit einher geht auch das Vorgreifen. Insgesamt muss also das Neue „eingebettet“ sein: Was hat das Neue mit dem Alten zu tun? Warum brauche ich das Neue, was konnte ich damals nicht? Was kann ich heute noch nicht? So kann man die quadratischen Gleichungen nur verstehen, wenn man sie mit linearen und auch höhergradigen Gleichungen kontrastiert. Lernen geschieht oft dadurch, dass man weiß, um was es sich nicht handelt.
- Nichtlinearität bedeutet schließlich Individualisierung. Jeder Schüler hat seine eigene Lernkurve, seine eigenen konstanten Phasen, Brüche und Sprünge. Dies muss man methodisch so oft wie möglich berücksichtigen, auch wenn dies eine Herausforderung ersten Ranges ist.

M	A	T	H	E
A	Z			H
T		P		T
H			G	A
E	H	T	A	M

## Literatur

### Bücher:

- John Hattie: Lernen sichtbar machen. überarbeitete deutschsprachige Ausgabe, Schneider Verlag Hohengehren GmbH 2013
- Günther Malle: Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Vieweg 1993.
- Hans-Joachim Vollrath: Algebra in der Sekundarstufe. Spektrum 1999.
- Friedhelm Padberg: Didaktik der Bruchrechnung. Spektrum 2002
- mathbu.ch: Impulse zur Mathematikdidaktik. Klett 2006

### Artikel:

- Bildungsministerium Österreich: Die Hattie-Studie, <http://www.sqa.at/course/view.php?id=36>
- H. Brügelmann: Metaanalysen: Nutzen und Grenzen, [www2.agprim.uni-siegen.de/printbrue/hattie.09.metaanalyse.pdf](http://www2.agprim.uni-siegen.de/printbrue/hattie.09.metaanalyse.pdf)
- N.Hilger: Schätzung von Effektgrößen, Doktorarbeit, Bonn 2010
- D. Wahl: Ergebnisse der Lehr-Lern-Psychologie. Bad Heilbrunn 2006
- Dr.G.Ruprecht (Hrsg): Tägliche Übungen, <http://www.math.tu-dresden.de/did/schule/tue/>
- Handreichungen des ISB (Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung München) im Rahmen des Sinus-Projekts:
  - Wiederholen als bewusstes Unterrichtselement, August 2000
  - Sinnstiftende Kontexte, September 2000
  - Kumulatives Lernen, <http://sinus-bayern.de/index.php?Seite=6948>
  - Erfahren von Kompetenzzuwachs im Mathematikunterricht, Oktober 1999

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				A
E	H	T	A	M

## Anhang A Hattie-Faktoren, relevant für den Matheunterricht

PI	MU-Faktoren	Rg	d	SE	SE	CLE	r <sup>2</sup>	V	Effekt
					%	%		%	
1	Formative Evaluation d. Unterr.	3	0,90	0,079	8,8	74	0,41	16,8	sehr hoch
2	Akzeleration	5	0,88	0,183	20,8	73	0,40	16,2	sehr hoch
3	Intervent. für Förderbedürftige	7	0,77	0,030	3,9	71	0,36	12,9	sehr hoch
4	Klarheit der Lehrperson	8	0,75			70	0,35	12,3	sehr hoch
5	Reziprokes Lernen	9	0,74			70	0,35	12,0	sehr hoch
6	Feedback	10	0,73	0,061	8,4	70	0,34	11,8	sehr hoch
7	Lehrer-Schüler-Beziehung	11	0,72	0,011	1,5	69	0,34	11,5	sehr hoch
8	Rhythmisiertes vs. geballtes Unterr.	12	0,71			69	0,33	11,2	sehr hoch
9	Metakognitive Strategien	13	0,69	0,181	26,2	69	0,33	10,6	sehr hoch
10	Kreativitätsförderung	17	0,65	0,097	14,9	68	0,31	9,6	sehr hoch
11	Lautes Denken	18	0,64	0,060	9,4	67	0,30	9,3	sehr hoch
12	Lehrerfort- und -weiterbildung	19	0,62	0,034	5,5	67	0,30	8,8	sehr hoch
13	Problemlösen	20	0,61	0,076	12,5	67	0,29	8,5	sehr hoch
14	Lehrstrategien	23	0,60	0,058	9,7	66	0,29	8,3	hoch
15	Kooperat. vs. Individuelles Lernen	24	0,59	0,088	14,9	66	0,28	8,0	hoch
16	Lerntechniken	25	0,59	0,090	15,3	66	0,28	8,0	hoch
17	Direkte Instruktion	26	0,59	0,096	16,3	66	0,28	8,0	hoch
18	Mastery-Learning	29	0,58	0,055	9,5	66	0,28	7,8	hoch
19	Fallbeispiele	30	0,57	0,042	7,4	66	0,27	7,5	hoch
20	Häusliches Anregungsniveau	31	0,57			66	0,27	7,5	hoch
21	Concept Mapping	33	0,57	0,051	8,9	66	0,27	7,5	hoch
22	Ziele	34	0,56	0,057	10,2	65	0,27	7,3	hoch
23	Peer-Tutoring	36	0,55	0,103	18,7	65	0,27	7,0	hoch
24	Kooperat. vs. Kompetitives Lernen	37	0,54	0,112	20,7	65	0,26	6,8	hoch
25	Klassenzusammenhalt	39	0,53	0,016	3,0	65	0,26	6,6	hoch
26	Kellers pers. Instruktionssystem	40	0,53			65	0,26	6,6	hoch
27	Peer-Einflüsse	41	0,53			65	0,26	6,6	hoch
28	Klassenführung	42	0,52			64	0,25	6,3	hoch
29	Interaktive Lernvideos	44	0,52	0,076	14,6	64	0,25	6,3	hoch
30	Elternunterstützung beim Lernen	45	0,51	0,178	34,9	64	0,25	6,1	hoch
31	Spielförderung	46	0,50			64	0,24	5,9	hoch
32	Lernen in Kleingruppen	48	0,49			64	0,24	5,7	hoch
33	Konzentration/Ausdauer/Engag.	49	0,48	0,032	6,7	63	0,23	5,4	hoch
34	Schuleffekte	50	0,48	0,019	4,0	63	0,23	5,4	hoch
35	Motivation	51	0,48	0,047	9,8	63	0,23	5,4	hoch
36	Fragenstellen	53	0,46	0,068	14,8	63	0,22	5,0	hoch
37	Förderung math. Kompetenzen	54	0,45	0,071	15,8	62	0,22	4,8	hoch
38	Qualität Lehrperson (Schülersicht)	56	0,44	0,060	13,6	62	0,21	4,6	hoch
39	Lehrererwartungen	58	0,43	0,081	18,8	62	0,21	4,4	hoch
40	Selbstkonzept	60	0,43	0,010	2,3	62	0,21	4,4	hoch
41	Verhaltensziele/Adv. Organizer	61	0,41	0,040	9,8	61	0,20	4,0	hoch
42	Kooperatives Lernen	63	0,41	0,060	14,6	61	0,20	4,0	hoch

M	A	T	H	E
A	z			H
T		P		T
H			G	A
E	H	T	A	M

Auf dieser Seite folgen die Faktoren mit geringem bis schädlichem Effekt.

PI	Faktoren	Rg	d	SE	SE	CLE	r	V	Effekt
					%	%		%	
43	Angstreduktion	66	0,40			61	0,20	3,8	durchschn.
44	Integrierte Curricula	67	0,39	0,050	12,8	61	0,19	3,7	gering
45	Zusatzangebote für Hochbegabte	68	0,39	0,018	4,6	61	0,19	3,7	gering
46	Aktive Lernzeit	70	0,38	0,101	26,6	61	0,19	3,5	gering
47	Computerunterstützung	71	0,37	0,059	15,9	60	0,18	3,3	gering
48	Ergänzende Materialien	72	0,37	0,043	11,6	60	0,18	3,3	gering
49	Bilingualer Unterricht	73	0,37	0,140	37,8	60	0,18	3,3	gering
50	Einstellung zu Mathe/Naturwis.	75	0,36			60	0,18	3,1	gering
51	Taktung von Leistungstests	79	0,34	0,044	12,9	59	0,17	2,8	gering
52	Reduzierung Unterrichtsstörung	80	0,34	0,037	10,9	59	0,17	2,8	gering
53	Induktives Vorgehen	83	0,33	0,035	10,6	59	0,16	2,7	gering
54	Lehrpersonen-Effekte	85	0,32	0,020	6,3	59	0,16	2,5	gering
55	Förderklassen für Hochbegabte	87	0,30	0,064	21,3	58	0,15	2,2	gering
56	Hausaufgaben	88	0,29	0,027	9,3	58	0,14	2,1	gering
57	Bewegung/Entspannung	90	0,28	0,040	14,3	58	0,14	1,9	gering
58	Inklusive Beschulung	92	0,28			58	0,14	1,9	gering
59	Nutzung von Taschenrechner	93	0,27	0,092	34,1	58	0,13	1,8	gering
60	Programmierte Instruktion	95	0,24	0,089	37,1	57	0,12	1,4	gering
61	Kompetit. vs. Individuelles Lernen	97	0,24	0,232	96,7	57	0,12	1,4	gering
62	Individualisierung	100	0,23	0,056	24,3	56	0,11	1,3	gering
63	Test-Training/-Coaching	103	0,22	0,024	10,9	56	0,11	1,2	gering
64	Umfassende Unterrichtsreformen	105	0,22			56	0,11	1,2	gering
65	Klassengröße	106	0,21			56	0,10	1,1	gering
66	Zuschnitt Methoden auf Schüler	108	0,19	0,070	36,8	55	0,09	0,9	vernachlässigb.
67	Schülerpersönlichkeit	109	0,19	0,007	3,7	55	0,09	0,9	vernachlässigb.
68	Co-Teaching/Team-Teaching	111	0,19	0,057	30,0	55	0,09	0,9	vernachlässigb.
69	Unmittelbarkeit der Rückmeldung	115	0,16			55	0,08	0,6	vernachlässigb.
70	Interne Differenzierung	116	0,16			55	0,08	0,6	vernachlässigb.
71	Technikgestützt. Lernen zuhause	117	0,16			55	0,08	0,6	vernachlässigb.
72	Problembasiertes Lernen	118	0,15	0,085	56,7	54	0,07	0,6	vernachlässigb.
73	Mentoring	120	0,15	0,047	31,3	54	0,07	0,6	vernachlässigb.
74	Leistungshomogene Klassenbild.	121	0,12	0,045	37,5	53	0,06	0,4	vernachlässigb.
75	Fachkompetenz des Lehrers	125	0,09	0,016	17,8	53	0,04	0,2	vernachlässigb.
76	Nachmittags-/Sommerkurse	127	0,09			53	0,04	0,2	vernachlässigb.
77	Jahrgangsübergreifende Klassen	131	0,04			51	0,02	0,0	vernachlässigb.
78	Freiarbeit	132	0,04	0,176	440,0	51	0,02	0,0	vernachlässigb.
79	Offene Zimmer/Lehr-/Lernformen	133	0,01	0,032	320,0	50	0,00	0,0	vernachlässigb.
80	Dauer der Sommerferien	134	-0,09			47	-0,04	0,2	schädlich
81	Nicht-Versetzung	136	-0,16			45	-0,08	0,6	schädlich
82	Fernsehen	137	-0,18			45	-0,09	0,8	schädlich
83	Schulwechsel	138	-0,34	0,005	1,5	41	-0,17	2,8	schädlich

M	A	T	H	E
A	Z			H
T		P		T
H			G	A
E	H	T	A	M

## Anhang B Etwas vereinfachte Statistik für Interessierte

Die **Effektstärke**  $d = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma}$  nach Cohens ist eine standardisierte Mittelwertdifferenz, die angibt, um wieviele Standardabweichungen die Erwartungswerte von zwei Verteilungen voneinander abweichen.  $d = 0,5$  bedeutet dann, dass der Erwartungswert der einen Verteilung, die mit dem Einflussfaktor gemessen wurde, eine halbe Standardabweichung größer ist, als der der Verteilung ohne den Faktor.

Sind die Standardabweichungen der beiden zu vergleichenden Verteilungen verschieden, so ist der Nenner in der obigen Formel durch die gemittelte Varianz  $\sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}}$  zu ersetzen.

Der **Common Language Effekt**  $CLE = \Phi\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)$  nach McGraw und Wong ist eine stochastische Überlegenheit, die von normalverteilten Gruppen ausgeht ( $\Phi$  ist die kumulierte Standardnormal-verteilung) und wird meist in Prozent angegeben.  $CLE = 60\%$  bedeutet dann, dass bei 60 von 100 betrachteten Stichprobenmitgliedern der betrachtete Einflussfaktor positiv wirkt (bei 40 wirkt er gar nicht oder negativ). Im Bereich  $-1 < d < 1$  ist der Zusammenhang zwischen dem CLE und der Effektstärke in guter Näherung linear:  $CLE \approx 0,27 \cdot d + 0,5$  (oder etwas größer:  $CLE \approx \frac{d}{4} + \frac{1}{2}$ )

Der **Korrelationskoeffizient**  $r = \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4}}$  ist ein Maß für die Güte einer zwischen den zu vergleichenden Verteilungen durchgeführten linearen Regressionsanalyse (Sind die Stichprobengrößen der Verteilungen verschieden, so ist die 4 durch  $\frac{(n_1 + n_2)^2}{n_1 \cdot n_2}$  zu ersetzen.). Er gibt an, wie stark sich der Erwartungswert der einen Verteilung verändert, wenn der der anderen Verteilung um eine Standardabweichung folgt.  $r = 0,5$  bedeutet dann, dass die eine Verteilung um eine halbe Standardabweichung steigt, wenn man die andere um eine Standardabweichung vergrößert. Mithin ist der Korrelationskoeffizient – im Gegensatz zur Effektstärke – beschränkt:  $-1 \leq r \leq 1$

Im Bereich  $-1 < d < 1$  ist der Zusammenhang zwischen dem Korrelationskoeffizienten und der Effektstärke in guter Näherung proportional:  $r \approx 0,47 \cdot d$  (oder größer:  $r \approx \frac{d}{2}$ )

Die (Gesamt-) **Varianz**  $V = r^2$  ist ein aufgeklärtes statistisches Maß und setzt die Varianzen der zu vergleichenden Verteilungen in Beziehung.

$V = 0,25$  bedeutet dann, dass 25% der Variabilität der einen Größe durch die Veränderung der anderen Größe zustande kommt (bzw. „erklärt“ werden kann).

M	A	T	H	E
A	Z			H
T		P		T
H			G	A
E	H	T	A	M

## Anhang C Drei Strukturlegepläne für Klasse 6

# Brüche

<b>Addieren</b>	<b>Kürzen</b>
<b>Anordnen</b>	<b>Multiplizieren</b>
<b>bildliche Darstellung</b>	<b>Nenner</b>
<b>Bruchteil</b>	<b>Potenzieren</b>
<b>Bruchzahl</b>	<b>reine Brüche</b>
<b>Dezimal- oder Kommazahl</b>	<b>Subtrahieren</b>
<b>Dividieren</b>	<b>Tipps/Tricks</b>
<b>Doppelbrüche</b>	<b>Vergleichen</b>
<b>Erweitern</b>	<b>Vervielfachen</b>
<b>Fehlerver- meidung</b>	<b>vollständig gekürzt</b>
<b>gemeinsamer Nenner</b>	<b>von-Rechnen</b>
<b>gemischte Zahlen</b>	<b>Zähler</b>
<b>Hauptnenner</b>	<b>Zahlenstrahl</b>

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

# Geometrie

<b>Abstand</b>	<b>Kreis</b>
<del><b>Achsenkreuz</b></del>	<b>Netz</b>
<b>Achsen- spiegelung</b>	<b>Oberfläche</b>
<b>Achsen- symmetrie</b>	<b>orthogonal senkrecht</b>
<b>besondere Dreiecke</b>	<b>parallel</b>
<b>besondere Vierecke</b>	<b>Punkt- spiegelung</b>
<b>Ecken, Flächen und Kanten</b>	<b>Punkt- Symmetrie</b>
<b>Fehlerver- meidung</b>	<b>Schnittpunkt</b>
<b>Figuren</b>	<b>Schrägbild</b>
<b>Flächeninhalt</b>	<b>Strecken</b>
<b>Geraden</b>	<b>Tipps/Tricks</b>
<b>Körper</b>	<b>Umfang</b>
<b>Körpernamen</b>	<b>Volumen</b>



M	A	T	H	E
A	Z			H
T		P		T
H			G	A
E	H	T	A	M

## Zuordnungen/Diagramme

<b>Achsenkreuz</b>	<b>Punkte auf Graphen</b>
<b>Antiproportionale Zuordnung</b>	<b>Punkte-diagramm</b>
<b>Balken-diagramm</b>	<b>Proportionale Zuordnung</b>
<b>Fehlervermeidung</b>	<b>Stabdiagramm</b>
<b>Graphen</b>	<b>Tipps/Tricks</b>
<b>Graphen interpretieren</b>	<b>Weder-noch-Zuordnung</b>
<b>Graphen zeichnen</b>	<b>Wertetabelle</b>
<b>Kreisdiagramm</b>	<b>Zuordnung</b>
<b>Linien-diagramm</b>	<b>Zuordnungs-term</b>

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

## Anhang D Strukturlegeplan für Klasse 8

# Quadratische Gleichungen

<b>abc-Formel</b>	<b>Nullprodukt</b>
<b>Ausklammern möglich</b>	<b>Plus/Minus</b>
<b>Diskriminante</b>	<b>rein quadratisch</b>
<b>dritte binomische Formel</b>	<b>Tipps/Tricks</b>
<b>eine Lösung</b>	<b>Umstellen</b>
<b>erste binomische Formel</b>	<b>Vereinfachen</b>
<b>Fehlervermeidung</b>	<b>Vieta</b>
<b>keine Lösung</b>	<b>Wurzel ziehen möglich</b>
<b>Mitternachts- formel</b>	<b>zwei Lösungen</b>
<b>Nullgleichung</b>	<b>zweite binomische Formel</b>