

Der Kosinussatz

Arbeitsaufträge:

Wähle mindestens einen der folgenden Arbeitsaufträge. Den Schwierigkeitsgrad erkennst du an der Anzahl der Sterne.

(1) ★

Berechnungen mit dem Kosinussatz

Hier lernst an verschiedenen konkreten Beispielen mit Zahlen die Anwendung des Kosinussatzes kennen.

(2) ★★

Herleitung des Kosinussatzes mit einem Puzzle

Zunächst lernst du an einigen konkreten Beispielen mit Zahlen die Anwendung des Kosinussatzes kennen. Anschließend bringst du vorgebene Puzzle-Karten in die richtige Reihenfolge und leitest so den Kosinussatz her.

(3) ★★★

Herleitung des Kosinussatzes mit einem Arbeitsplan

Mit Hilfe eines Arbeitsplanes leitest du den Kosinussatz her.

Im zweiten Schritt der Herleitung ist dann noch deine mathematische Kreativität gefragt.

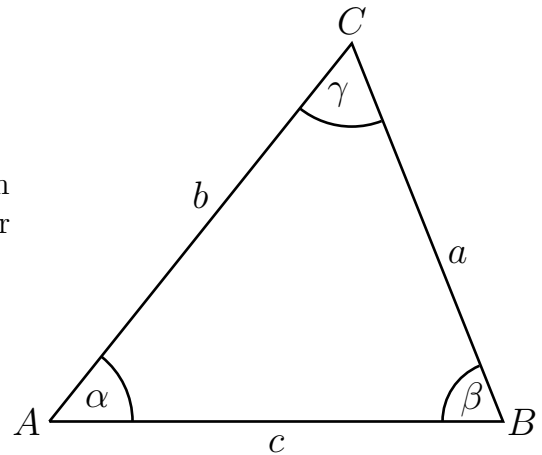
Arbeitsauftrag (1)

Berechnungen mit dem Kosinussatz

Auch in einem Dreieck ohne rechten Winkel kann man Winkel und Längen berechnen. Eine Möglichkeit dafür ist der **Kosinussatz**:

In einem beliebigen Dreieck gilt

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$



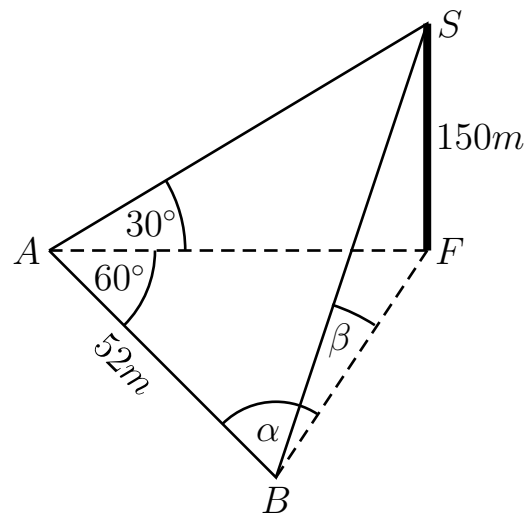
Aufgabe 1.

- Für ein Dreieck ABC gilt $b = 5\text{cm}$, $c = 6\text{cm}$ und $\alpha = 150^\circ$.
Berechne die Seitenlänge a .
- Für ein Dreieck ABC gilt $a = 5\text{cm}$, $b = 6\text{cm}$ und $\beta = 60^\circ$.
Formuliere den Kosinussatz für den Winkel β und berechne die Seitenlänge c .

Aufgabe 2.

Vom Endpunkt A einer 52m langen Standlinie \overline{AB} in der waagerechten Ebene erscheint ein 150m hoher Turm unter dem Erhebungswinkel 30° .

- Berechne die Entfernung vom Punkt A zum Fuß des Turms F .
- Berechne die Entfernung vom Punkt B zum Fuß des Turms F .
- Berechne den Erhebungswinkel β .
- Berechne den Winkel α .



Aufgabe 3. Zwei Schüler trennen sich am Gabelpunkt zweier Straßen, die einen Winkel von 100° bilden. Die Straßen verlaufen von der Gabelung an geradlinig. Wie weit sind die Schüler nach fünf Minuten voneinander entfernt, wenn der eine zu Fuß in der Minute 120m , der andere mit dem Fahrrad 15km in der Stunde zurücklegt?

Lösungen zu den Berechnungen

Aufgabe 1.

a)

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \\a^2 &= (5\text{cm})^2 + (6\text{cm})^2 - 2 \cdot 5\text{cm} \cdot 6\text{cm} \cdot \cos(150^\circ) \\a &\approx 10,63\text{cm}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta) \\(6\text{cm})^2 &= (5\text{cm})^2 + c^2 - 2 \cdot 5\text{cm} \cdot c \cdot \cos(60^\circ) \\36\text{cm}^2 &= 25\text{cm}^2 + c^2 - 5\text{cm} \cdot c \\0 &= c^2 - 5\text{cm} \cdot c - 11\text{cm}^2 \\c_{1,2} &= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 44}}{2}\text{cm} = \frac{5 \pm \sqrt{69}}{2}\text{cm} \\c_1 &\approx 6,65\text{cm} \\c_2 &\approx -1,65\text{cm}\end{aligned}$$

Die negative Lösung entfällt, da die Seitenlänge positiv sein muss.

Aufgabe 2.

a) Im rechtwinkligen Dreieck AFS gilt:

$$\begin{aligned}\frac{150\text{m}}{|\overline{AF}|} &= \tan(30^\circ) \\|\overline{AF}| &= \frac{150\text{m}}{\tan(30^\circ)} \approx 259,8\text{m}\end{aligned}$$

b) Im Dreieck ABF gilt:

$$\begin{aligned}|\overline{BF}|^2 &= |\overline{AF}|^2 + |\overline{AB}|^2 - 2 \cdot |\overline{AF}| \cdot |\overline{AB}| \cdot \cos(60^\circ) \\&\approx (259,8\text{m})^2 + (52\text{m})^2 - 2 \cdot 259,8\text{m} \cdot 52\text{m} \cdot \cos(60^\circ) \\|\overline{BF}| &\approx 238,1\text{m}\end{aligned}$$

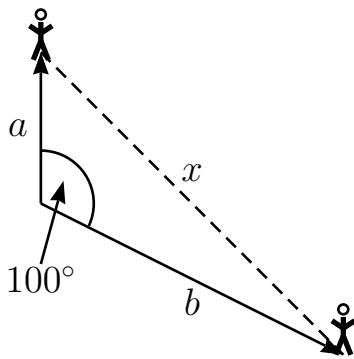
c) Im rechtwinkligen Dreieck SBF gilt:

$$\begin{aligned}\tan(\beta) &= \frac{150\text{m}}{238,1\text{m}} \\\beta &\approx 32,2^\circ\end{aligned}$$

d) Im Dreieck ABF gilt:

$$\begin{aligned}|\overline{AF}|^2 &= |\overline{AB}|^2 + |\overline{BF}|^2 - 2 \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{BF}| \cdot \cos(\alpha) \\\cos(\alpha) &= \frac{|\overline{AF}|^2 - |\overline{AB}|^2 - |\overline{BF}|^2}{-2 \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{BF}|} \approx \frac{(259,8\text{m})^2 - (52\text{m})^2 - (238,1\text{m})^2}{-2 \cdot 52\text{m} \cdot 238,1\text{m}} \\\alpha &\approx 109,1^\circ\end{aligned}$$

Aufgabe 3.



Berechnung der zurückgelegten Strecken:

$$a = 120m \cdot 5 = 600m$$

$$b = 15 \frac{km}{h} \cdot 5min = 15 \cdot \frac{1000m}{60min} \cdot 5min = 1250m$$

Berechnung des Abstandes x :

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(100^\circ) \approx 2182972,267m^2$$

$$x \approx 1477,49m$$

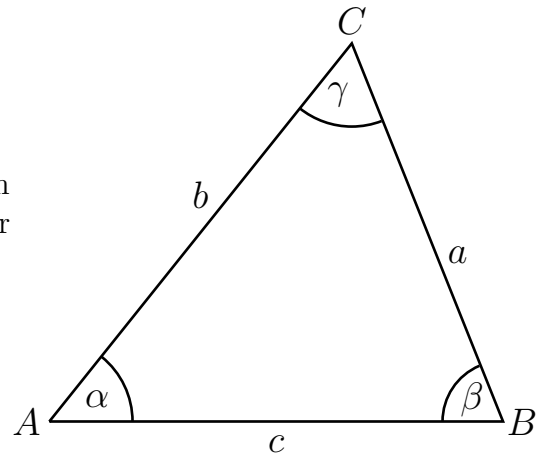
Arbeitsauftrag (2)

Herleitung des Kosinussatzes mit Puzzle

Auch in einem Dreieck ohne rechten Winkel kann man Winkel und Längen berechnen. Eine Möglichkeit dafür ist der **Kosinussatz**:

In einem beliebigen Dreieck gilt

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$



Aufgabe 1.

- Für ein Dreieck ABC gilt $b = 5\text{cm}$, $c = 6\text{cm}$ und $\alpha = 150^\circ$.
Berechne die Seitenlänge a .
- Für ein Dreieck ABC gilt $a = 5\text{cm}$, $b = 6\text{cm}$ und $\beta = 60^\circ$.
Formuliere den Kosinussatz für den Winkel β und berechne die Seitenlänge c .

Aufgabe 2. Herleitung:

Bringe die Karten in die richtige Reihenfolge und leite so die Formel für den Kosinussatz her.

Lösung zur Herleitung des Kosinussatzes mit Puzzle

Aufgabe 1.

a)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

$$a^2 = (5\text{cm})^2 + (6\text{cm})^2 - 2 \cdot 5\text{cm} \cdot 6\text{cm} \cdot \cos(150^\circ)$$

$$a \approx 10,63\text{cm}$$

b)

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$

$$(6\text{cm})^2 = (5\text{cm})^2 + c^2 - 2 \cdot 5\text{cm} \cdot c \cdot \cos(60^\circ)$$

$$36\text{cm}^2 = 25\text{cm}^2 + c^2 - 5\text{cm} \cdot c$$

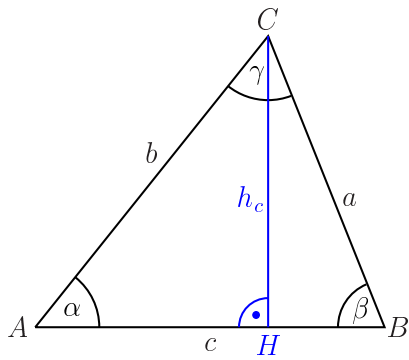
$$0 = c^2 - 5\text{cm} \cdot c - 11\text{cm}^2$$

$$c_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 44}}{2} \text{cm} = \frac{5 \pm \sqrt{69}}{2} \text{cm}$$

$$c_1 \approx 6,65\text{cm}$$

$$c_2 \approx -1,65\text{cm}$$

Die negative Lösung entfällt, da die Seitenlänge positiv sein muss.



Pythagoras im Dreieck AHC :

$$b^2 = |\overline{AH}|^2 + h_c^2 \quad (*)$$

Pythagoras im Dreieck HBC :

$$a^2 = |\overline{HB}|^2 + h_c^2$$

$$\begin{aligned} a^2 &= (c - |\overline{AH}|)^2 + h_c^2 \\ &= c^2 - 2c \cdot |\overline{AH}| + |\overline{AH}|^2 + h_c^2 \end{aligned}$$

$$h_c^2 = a^2 - c^2 + 2c \cdot |\overline{AH}| - |\overline{AH}|^2$$

h_c^2 eingesetzt in (*):

$$\begin{aligned} b^2 &= |\overline{AH}|^2 + a^2 - c^2 \\ &\quad + 2c \cdot |\overline{AH}| - |\overline{AH}|^2 \end{aligned}$$

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2c \cdot |\overline{AH}|$$

Im rechtwinkligen AHC gilt

$$\cos(\alpha) = \frac{|\overline{AH}|}{b}$$

und somit $|\overline{AH}| = b \cdot \cos(\alpha)$.

Eingesetzt ergibt sich

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

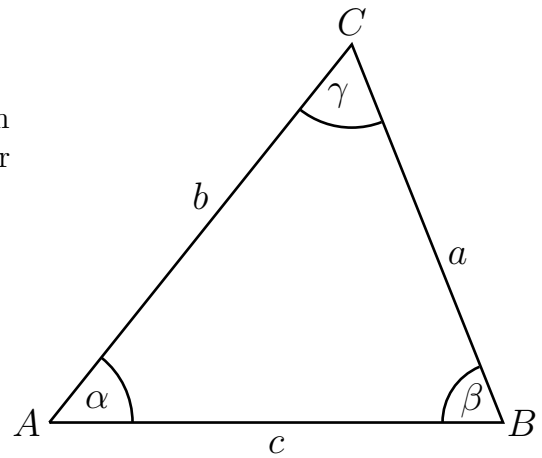
Arbeitsauftrag (3)

Herleitung des Kosinussatzes mit einem Arbeitsplan

Auch in einem Dreieck ohne rechten Winkel kann man Winkel und Längen berechnen. Eine Möglichkeit dafür ist der **Kosinussatz**:

In einem beliebigen Dreieck gilt

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$



a) Leite mit Hilfe der Anweisungen die Formel für den Kosinussatz her.

- (1) Zeichne die Höhe h_c ein und benenne den Höhenfußpunkt H .
- (2) Wende den Satz des Pythagoras im Dreieck AHC an.
- (3) Wende den Satz des Pythagoras im Dreieck HBC an und zeige damit, dass

$$h_c^2 = a^2 - c^2 + 2c \cdot |\overline{AH}| - |\overline{AH}|^2$$

- (4) Zeige mit Hilfe der beiden erhaltenen Gleichungen (2) und (3), dass

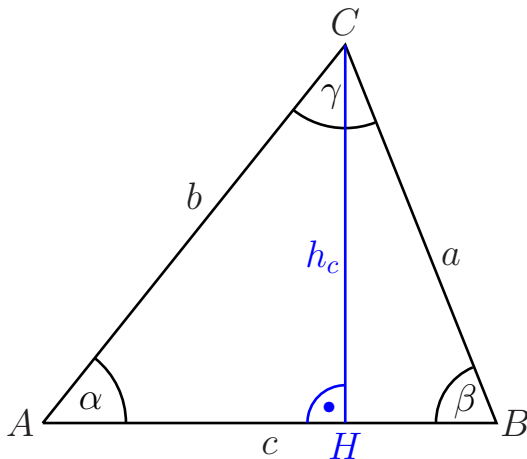
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot |\overline{AH}|$$

- (5) Leite jetzt die Formel des Kosinussatzes her.

b) Gib den Winkelbereich für α an, in dem die obere Herleitung gilt. Entwickle eine Herleitung für den noch fehlenden Winkelbereich.

Lösung zur Herleitung des Kosinussatzes mit einem Arbeitsplan:

a)


Pythagoras im Dreieck AHC :

$$b^2 = |\overline{AH}|^2 + h_c^2 \quad (*)$$

Pythagoras im Dreieck HBC :

$$\begin{aligned} a^2 &= |\overline{HB}|^2 + h_c^2 \\ &= (c - |\overline{AH}|)^2 + h_c^2 \\ &= c^2 - 2c \cdot |\overline{AH}| + |\overline{AH}|^2 + h_c^2 \\ h_c^2 &= a^2 - c^2 + 2c \cdot |\overline{AH}| - |\overline{AH}|^2 \end{aligned}$$

 h_c^2 eingesetzt in (*):

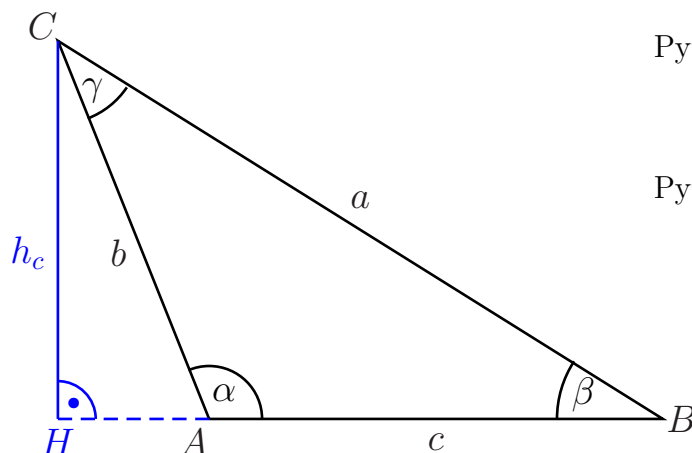
$$\begin{aligned} b^2 &= |\overline{AH}|^2 + a^2 - c^2 + 2c \cdot |\overline{AH}| - |\overline{AH}|^2 \\ b^2 &= a^2 - c^2 + 2c \cdot |\overline{AH}| \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2c \cdot |\overline{AH}| \end{aligned}$$

Im rechtwinkligen AHC gilt $\cos(\alpha) = \frac{|\overline{AH}|}{b}$, also $|\overline{AH}| = b \cdot \cos(\alpha)$.
Eingesetzt ergibt sich

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

b) Die obere Herleitung gilt für $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Für $\alpha = 90^\circ$ erhält man, da $\cos(90^\circ) = 0$, den Satz des Pythagoras, der bereits bewiesen ist.

Herleitung für $90^\circ < \alpha < 180^\circ$:

Pythagoras im Dreieck HAC :

$$b^2 = |\overline{AH}|^2 + h_c^2 \quad (*)$$

Pythagoras im Dreieck HBC :

$$\begin{aligned} a^2 &= |\overline{HB}|^2 + h_c^2 \\ &= (c + |\overline{AH}|)^2 + h_c^2 \\ &= c^2 + 2c \cdot |\overline{AH}| + |\overline{AH}|^2 + h_c^2 \\ h_c^2 &= a^2 - c^2 - 2c \cdot |\overline{AH}| - |\overline{AH}|^2 \end{aligned}$$

 h_c^2 eingesetzt in (*):

$$\begin{aligned} b^2 &= |\overline{AH}|^2 + a^2 - c^2 - 2c \cdot |\overline{AH}| - |\overline{AH}|^2 \\ b^2 &= a^2 - c^2 - 2c \cdot |\overline{AH}| \\ a^2 &= b^2 + c^2 + 2c \cdot |\overline{AH}| \end{aligned}$$

Im rechtwinkligen $\triangle HAC$ gilt $\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{|\overline{AH}|}{b}$.

Da $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$ folgt $|\overline{AH}| = -b \cdot \cos(\alpha)$ und somit

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

Hinweise zum Einsatz im Unterricht

Der Kosinussatz ist kein verpflichtender Inhalt des Bildungsplanes. Er eignet sich aber, um trigonometrisches Rechnen zu vertiefen. Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck mit Sinus, Kosinus und Tangens sowie der Satz des Pythagoras müssen den Schülerinnen und Schülern bekannt sein. Für die letzte Aufgabe in Arbeitsauftrag (3), die Erweiterung auf stumpfwinklige Dreiecke, muss die Winkelerweiterung der trigonometrischen Funktionen zur Verfügung stehen.

Bei Arbeitsauftrag (1) finden alle Schülerinnen und Schüler einen Einstieg. Ebenso stellt das Anwenden des Satzes nur eine kleine Herausforderung, überwiegend im algebraischen Bereich, dar.

Bei Arbeitsauftrag (2) müssen die Karten in die richtige Reihenfolge gebracht werden, um den Satz herzuleiten. Auf die Verallgemeinerung für stumpfwinklige Dreiecke wird hierbei verzichtet.

Bei Arbeitsauftrag (3), der angeleiteten Herleitung, wird sowohl der Satz des Pythagoras wie auch elementare Trigonometrie verwendet. Somit bietet die Herleitung eine vertiefte Auseinandersetzung mit grundlegenden Kompetenzen.

In der letzten Teilaufgabe muss eine mathematische Verallgemeinerung sowohl erkannt als auch geleistet werden.

Zur Motivation können der Vergleich von Berechnungen in einem rechtwinkligen und in einem spitzwinkligen Dreieck dienen.

Zeitbedarf: 45 – 90 Minuten