



## Umsetzung des Bildungsplans ab 2016 /2017

### - Unterrichtsbeispiele zu prozessbezogenen Kompetenzen -

	pK I:	pK II:
	<p><b>Argumentieren und Beweisen:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Fragen stellen und Vermutungen begründet äußern</li> <li>• mathematische Denkstrukturen entwickeln</li> <li>• mathematische Argumentationen (wie Erläuterungen, Begründungen, Beweise) nachvollziehen und entwickeln</li> </ul>	<p><b>Problemlösen:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Probleme analysieren</li> <li>• Strategien zum Problemlösen auswählen, anwenden und daraus einen Plan zur Lösung entwickeln</li> <li>• die Lösung überprüfen und den Lösungsprozess reflektieren</li> </ul>
<b>Teilbarkeit</b>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<b>Bruchrechnung</b>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<b>Figurenlehre</b>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

## „Argumentieren und Begründen“ am Beispiel der Teilbarkeit

Im Bereich der Teilbarkeit ist es leicht möglich, Argumentieren und Begründen auf dem Niveau von Fünft- und Sechstklässlern zu üben. Dabei geht man natürlich altersgemäß vor und beschränkt sich auf die Begründung konkreter Beispiele (die aber durchaus hier und da verallgemeinert werden können).

Dabei spielen selbstverständlich nicht alle Aspekte eine Rolle, die als Teilkompetenzen der Argumentationskompetenz aufgelistet sind. Beispielsweise kann man zu diesem Zeitpunkt und in diesem Kontext noch keine „mathematischen Denkstrukturen entwickeln“, d.h.

- in einer mathematischen Aussage zwischen Voraussetzung und Behauptung unterscheiden,
- eine mathematische Aussage in einer standardisierten Form (zum Beispiel Wenn-Dann) formulieren,
- zwischen einem Satz und seinem Kehrsatz unterscheiden und den Unterschied an Beispielen erklären.

Fokussieren kann man aber folgende Teilkompetenzen:

### Fragen stellen und Vermutungen begründet äußern

- in mathematischen Zusammenhängen Vermutungen entwickeln und als mathematische Aussage formulieren;
- eine Vermutung anhand von Beispielen auf ihre Plausibilität prüfen oder anhand eines Gegenbeispiels widerlegen;
- bei der Entwicklung und Prüfung von Vermutungen den Taschenrechner verwenden;

### Mathematische Argumentationen (wie Erläuterungen, Begründungen, Beweise) nachvollziehen und entwickeln

- mehrschrittige Argumentationsketten aufbauen;
- Lösungswege beschreiben und begründen;

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

**Beispiele von Unterrichtsfragen, mit denen die prozessbezogene Kompetenz „Argumentieren und Begründen“ in der Teilbarkeit geschult werden kann:**

- 1 a) Ist jede durch 4 (9) teilbare Zahl ist auch durch 2 (3) teilbar?  
b) Ist jede durch 2 (3, 6) teilbare Zahl auch durch 4 (9,12) teilbar?
- 2 a) Ist eine Zahl durch 6 teilbar, wenn sie gleichzeitig durch 2 und 3 teilbar ist?  
b) Ist eine Zahl durch 8 teilbar, wenn sie gleichzeitig durch 2 und 4 teilbar ist?
- 3 a) Sind alle Zweierpotenzen gerade?  
b) Sind alle Primzahlen ungerade?
- 4 a) Sind die Quadratzahlen abwechselnd ungerade und gerade?  
b) Gibt es Quadratzahlen, die gleichzeitig Primzahlen sind?  
c) Wächst der Abstand von Quadratzahlen wächst ständig an?
- 5 Peter behauptet: „Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer durch 4 teilbar ist.“ Stimmt das? Begründe.
- 6 Im Theater soll Herr Maier für 29 Schüler jeweils 18 Euro zahlen. Die Kassiererin verlangt 525 Euro und Herr Maier sagt in Sekundenschnelle „Das kann nicht sein!“ Woher weiß er das so schnell ohne zu rechnen?
- 7 Sind alle durch 11 teilbaren Zahlen Schnapszahlen?
- 8 Peter meint: „Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 5 teilbar ist.“ Stimmt das? Begründe.
- 9 Sinkt die Einerziffer in der Neunerreihe immer um Eins?
- 10 Stimmt das? „Die Hunderterziffer ist egal, wenn es um die Teilbarkeit von 2 (4, 5, 10) geht.“ Begründe.
- 11 Andreas meint: „Da man zu jedem Teiler auch einen Ergänzungsteiler findet, ist die Anzahl der Teiler immer gerade.“ Stimmt das?
- 12  $49 = 7^2$  also  $T_{49} = \{1, 7, 49\}$ . Haben also alle Quadratzahlen 3 Teiler?
- 13 Hakan ist der Meinung, dass man beim Anwenden der Quersummenregel für die Teilbarkeit durch 3 (9), alle 3er (9er) weglassen kann. Stimmt das? Erläutere deine Aussage.
- 14 Haben Zahlen mit derselben Quersumme (Endziffer) auch dieselben Teiler? Begründe.
- 15 Luca sagt: „Ist die Quersumme zweistellig, so kann man erneut die Quersumme bilden und es genügt, nur diese für die Teilbarkeit zu betrachten.“ Stimmt das? Begründe.

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

- 16 Wie kann man die folgende Zerlegung der Zahl 8415 verwenden, um die Teilbarkeit durch 5 zu begründen:  $8415 = 8 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 5$
- 17 Wie kann man die folgende Zerlegung der Zahl 8412 verwenden, um die Teilbarkeit durch 4 zu begründen:  $8412 = 8 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 12$
- 18 Wie kann man die folgende Zerlegung der Zahl 6534 fortsetzen, um zu begründen, dass die Quersumme über die Teilbarkeit durch 3 (9) entscheidet?  
 $6534 = 6 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4 =$   
 $= 6 \cdot (999 + 1) + 5 \cdot (99 + 1) + 3 \cdot (9 + 1) + 4 = ???$
- 19 Kann die Quersumme einer Primzahl durch 5 teilbar sein?
- 20 Ist die echte Teilersumme einer Primzahl immer 1?
- 21 Ist die echte Teilersumme einer Zahl immer kleiner als die Zahl selbst?
- 22 Haben zwei verschiedene Primzahlen außer der 1 keine weiteren Teiler?
- 23 a) Leon meint: „Um eine Primzahl zu testen muss man nur bis zur ihrer Hälfte prüfen.“ Stimmt das? Begründe.  
 b) Julia meint: „Um eine Primzahl zu testen muss man nur die kleineren Primzahlen prüfen.“ Stimmt das? Begründe.  
 c) Alexandra behauptet sogar, dass es genügt, bis zu der Primzahl zu prüfen, deren Quadrat über der Zahl liegt. Begründe.
- 24 Ist 117 (101, 111) eine Primzahl?
- 25 Lässt sich aus den Ziffern 1, 2 und 3 eine Primzahl bilden?
- 26 Erhöht sich die Teileranzahl einer Zahl, wenn man sie verdoppelt?
- 27 a) Gibt es eine Zahl mit nur einem Teiler?  
 b) Gibt es eine Zahl mit unendlich vielen Teilern?  
 c) Gibt es eine Zahl ohne jeden Teiler?
- 28 a) Haben gerade Zahlen außer 1 immer mindestens einen gemeinsamen Teiler?  
 b) Haben ungerade Zahlen außer 1 immer mindestens einen gemeinsamen Teiler?
- 29 Haben Zweierpotenzen keine verschiedenen Primfaktoren?
- 30 Haben Quadratzahlen keine verschiedenen Primfaktoren?

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

## „Argumentieren und Begründen“ am Beispiel der Bruchrechnung

Bei der Einführung in die Bruchrechnung steht der Aufbau einer Grundvorstellung, die mit den Brüchen, sowie ihren Operationen verbunden sind, klar im Vordergrund. Auch beim „Rechnen mit Brüchen“ wird auf dieses ganzheitlich angelegte Bruchverständnis zurückgegriffen. Dass durch den Umgang mit der formalen Bedeutung der Bruchschreibweise, ebenso wie bei der Ausführung der Grundrechenarten mit Brüchen die prozessbezogene Kompetenz pK4 „Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“ durch notwendige und sinnvolle Übungen automatisch gefördert wird, steht außer Frage und liegt in der Natur der Sache.

Erstreckt sich das Unterrichten der Bruchrechnung nicht nur auf das Beibringen von formalen Algorithmen, sondern behält man die verständnisorientierte Beschäftigung mit den Brüchen als tragfähige Grundlage im Auge, wird klar, das in der Klasse 5/6 auch das „Argumentieren und Begründen“ (pK1) angemessen gefördert werden kann.

Dabei spielen selbstverständlich nicht alle Aspekte eine Rolle, die als Teilkompetenzen der Argumentationskompetenz aufgelistet sind. Beispielsweise kann man zu diesem Zeitpunkt und in diesem Kontext noch keine „mathematischen Denkstrukturen entwickeln“, d.h.

- in einer mathematischen Aussage zwischen Voraussetzung und Behauptung unterscheiden,
- eine mathematische Aussage in einer standardisierten Form (zum Beispiel Wenn-Dann) formulieren,
- zwischen einem Satz und seinem Kehrsatz unterscheiden und den Unterschied an Beispielen erklären.

Fokussieren kann man aber folgende Teilkompetenzen:

### **Fragen stellen und Vermutungen begründet äußern**

- in mathematischen Zusammenhängen Vermutungen entwickeln und als mathematische Aussage formulieren;
- eine Vermutung anhand von Beispielen auf ihre Plausibilität prüfen oder anhand eines Gegenbeispiels widerlegen;
- bei der Entwicklung und Prüfung von Vermutungen den Taschenrechner verwenden;

### **Mathematische Argumentationen (wie Erläuterungen, Begründungen, Beweise) nachvollziehen und entwickeln**

- mehrschrittige Argumentationsketten aufbauen;
- Lösungswege beschreiben und begründen;

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

## Beispiele von Unterrichtsfragen bzw. -aufgaben, mit denen die prozessbezogene Kompetenz „Argumentieren und Begründen“ in der Bruchrechnung geschult werden kann:

- 1 Wie kann das sein?

Multipliziert man zwei natürliche Zahlen (nicht 0 oder 1), dann ist das Produkt stets größer als jeder Faktor. Ist aber einer der Faktoren eine positive Bruchzahl, so kann das Produkt kleiner als einer der Faktoren sein.



- a) Suche je ein passendes Beispiel
- b) Betrachte nun das konkrete Beispiel:  $\frac{3}{4} \cdot 20$ .  
Begründe mit einem passenden Beispiel aus dem Alltag, dass das Produkt kleiner als 20 ist.
- c) Finde eine Aufgabe, so dass das Produkt kleiner als jeder einzelne Faktor ist.
- 2 Berechne  $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ , dann  $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$ . Was stellst du fest, wenn du so das Produkt weiterführst (also als nächstes  $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}$ ) usw. Setze fort und berechne. Begründe das Ergebnis.
- 3 Nimm begründet Stellung zu folgender Aussage: „Das Produkt zweier positiver Zahlen, deren Summe kleiner als 1 ist, ist ebenfalls kleiner als 1“
- 4 Der Radiomoderator sagt: „VFL Gummersbach hat heute gegen THW Kiel 20 zu 30 verloren. Kiel hat also zwei Drittel aller Tore geworfen“.  
Beschreibe, welchen Fehler der Radioreporter gemacht hat und verbessere die Aussage.
- 5 Wahr oder falsch: Begründe deine Antwort  
„Wenn zwei Brüche den gleichen Zähler haben, dann ist derjenige der kleinere Bruch der den größeren Nenner hat“
- 6 Ordne die Brüche der Größe nach:  $\frac{1}{3}; \frac{3}{4}; \frac{1}{2}; \frac{5}{8}; \frac{3}{4}; \frac{1}{3}; \frac{2}{7}; \frac{1}{4}; \frac{2}{3}; \frac{7}{10}; \frac{1}{9}; \frac{5}{6}$  und begründe deine Anordnung.

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

7 Sind folgende Behauptungen **richtig** oder **falsch**? Begründe.

- $\frac{1}{9} > \frac{1}{8}$ , da  $9 > 8$
- Sind Zähler und Nenner eines Bruchs beides gerade Zahlen, dann kann man den Bruch mit einer Zahl kürzen, die größer 1 ist
- Es gibt keinen Bruch den man mit 287 kürzen kann.
- Subtrahiert man zweier verschiedener Brüche voneinander, so ist das Ergebnis nie eine natürliche Zahl.
- Addiert man immer wieder den gleichen positiven Bruch hinzu, so ergibt sich irgendwann eine natürliche Zahl.
- Der Nenner einer Summe zweier positiven Brüche ist stets größer als die Nenner der Summanden.

M	A	T	H	E	
A		Z		H	
T			P	T	
H				G	A
E	H	T	A	M	

## „Argumentieren und Begründen“ am Beispiel Figuren

Dass mithilfe geometrischer Werkzeuge Probleme gelöst werden können, die diesbezügliche Kompetenz also geschult werden kann, steht außer Frage und überrascht wenig.

Spannender wird es, wenn man sich fragt, wie im propädeutischen Geometrieunterricht der Unterstufe das Argumentieren und Begründen geübt werden kann – spannender, weil wir in Klasse 7 den Schritt von der propädeutischen zu einer Geometrie wagen wollen, in der erste Beweise geführt werden.

Dabei spielen selbstverständlich (weil wir uns noch in der propädeutischen Geometrie bewegen) nicht alle Aspekte eine Rolle, die als Teilkompetenzen der Argumentationskompetenz aufgelistet sind. Beispielsweise kann man zu diesem Zeitpunkt und in diesem Kontext noch keine „mathematischen Denkstrukturen entwickeln“, d.h.

- in einer mathematischen Aussage zwischen Voraussetzung und Behauptung unterscheiden,
- eine mathematische Aussage in einer standardisierten Form (zum Beispiel Wenn-Dann) formulieren und
- zwischen einem Satz und seinem Kehrsatz unterscheiden und den Unterschied an Beispielen erklären;

Fokussieren kann man aber folgende Teilkompetenzen:

- mathematische Argumentationen (wie Erläuterungen, Begründungen, Beweise) nachvollziehen und entwickeln;
- beim Begründen unterschiedliche Darstellungsformen verwenden (verbal, zeichnerisch, formalisiert);
- mehrschrittige Argumentationsketten aufbauen;
- Lösungswege beschreiben und begründen;

Auch zu pK4 wird ein Beitrag dahingehend geleistet, als „zwischen symbolischer und formaler Sprache der Mathematik und natürlicher Sprache“ gewechselt wird.



M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

## Beispiele von Unterrichtsfragen bzw. -aufgaben, die Argumentationen einfordern und das Begründen in der Geometrie schulen:

- 1 Andreas sagt: „Wenn  $a \parallel b$  und  $b \perp c$ , dann ist auch  $a \perp c$ .“ Hat er Recht?
- 2 Wie viele Geraden kannst du durch einen Punkt zeichnen? Wie viele von ihnen stehen senkrecht aufeinander?
- 3 Welchen Abstand haben zwei Geraden voneinander, die nicht parallel sind?
- 4 Petra sagt: „Zwischen einem Punkt und einer Geraden gibt es verschiedene Abstände.“ Was meinst du dazu?
- 5 Begründe: Das Quadrat ist zugleich Rechteck, Parallelogramm und Raute.
- 6 Peter behauptet: „Wenn jedes Quadrat ein Rechteck ist und jedes Quadrat eine Raute, dann ist auch jedes Rechteck eine Raute.“ Stimmt das? Begründe.
- 7 „Beim Würfel stoßen an einer Ecke immer drei Kanten zusammen. Da er acht Ecken besitzt, hat er auch 24 Kanten.“ Warum ist die Aussage falsch? Begründe.
- 8 Stimmt das: Ein Würfelnetz besitzt immer denselben Umfang. Begründe.
- 9 Peter meint: „Der Flächeninhalt eines Rechtecks (eines Quadrats) besteht immer aus einer geraden Anzahl an Karokästchen.“ Stimmt das? Begründe.
- 10 Begründe oder widerlege: Figuren, die den gleichen Flächeninhalt haben, haben auch stets dieselbe Form.
- 11 Stimmt das? „Eine Fläche mit dem Flächeninhalt  $4 \text{ cm}^2$  ist quadratisch.“ Begründe anhand einer Zeichnung.
- 12 Der Flächeninhalt und der Umfang eines Rechtecks besitzen die gleiche Maßzahl. Geht das? Finde ein Beispiel.
- 13 Halbiert man beide Seitenlängen eines Quadrats (Rechtecks), so erhält man ein Viertel von dem ursprünglichen Flächeninhalt. Stimmt das? Begründe.
- 14 Hakan ist der Meinung, dass man jede Figur eindeutig in Rechtecke und Quadrate zerlegen kann. Stimmt das? Erläutere deine Aussage.
- 15 Moritz behauptet: „Zwei Figuren haben den gleichen Flächeninhalt, wenn sie sich jeweils in gleiche Teilfiguren zerlegen lassen.“ Hat er Recht? Begründe.
- 16 Drei gleich große Kugeln bestehen aus unterschiedlichen Materialien (Eisen, Holz und Styropor). Sind sie auch gleich schwer? Begründe.

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

- 17 Luca sagt: „Beim Berechnen des Volumens muss man nicht auf gleiche Einheiten achten. Man nimmt einfach am Schluss die kleinste Einheit.“ Stimmt das? Begründe.
- 18 Giulia glaubt, dass der Oberflächeninhalt und das Volumen eines Würfels annähernd gleich sind. Stimmt ihre Vermutung? Erkläre.
- 19 Sind folgende Behauptungen richtig oder falsch? Begründe.
- Der Flächeninhalt jeder Figur lässt sich immer eindeutig berechnen.
  - Wenn man in die nächstkleinere Flächeneinheit umwandelt, dann muss man das Komma um zwei Stellen nach rechts verschieben.
  - Verschieden große Flächen können denselben Umfang haben.
  - Wenn man von  $a$  in  $\text{cm}^2$  umwandeln möchte, muss man sechs Nullen hinzufügen oder das Komma um sechs Stellen nach rechts verschieben.
  - Beim Addieren von Flächeninhalten muss man nur das Komma stellengerecht untereinander schreiben.
  - Ein Quadrat mit der Kantenlänge 30 cm besitzt den gleichen Flächeninhalt wie acht Rechtecke mit den Kantenlängen  $a = 7,5$  cm und  $b = 15$  cm.
  - Der Flächeninhalt eines Quadrats lässt sich auch mit der Formel für den Flächeninhalt eines Rechtecks berechnen.
  - Eine Pyramide mit einer sechseckigen Grundfläche besteht aus zwölf Kanten, sechs Ecken und sechs Flächen.
  - Jedes Prisma besteht aus genau fünf Flächen.
  - Es gibt genauso viele unterschiedliche Würfelnetze wie Quadernetze.
  - Der Oberflächeninhalt eines Quaders lässt sich auch folgendermaßen berechnen:  

$$A_0 = 2 \cdot l \cdot l + 2 \cdot b \cdot b + 2 \cdot h \cdot h$$
  - Der Oberflächeninhalt eines Quaders lässt sich als Sonderfall des Oberflächeninhalts eines Würfels berechnen.
  - Wenn man die Kantenlänge eines Würfels verdoppelt, dann verdoppelt sich auch sein Oberflächeninhalt.
  - Jeder Quader ist ein Würfel und jeder Würfel ist ein Quader.

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

## „Probleme lösen“ am Beispiel der Teilbarkeit

Im Bereich der Teilbarkeit ist es auch gut möglich, das Problemlösen auf dem Niveau von Fünft- und Sechstklässlern zu üben und zu fördern.

Das z.B. die prozessbezogene Kompetenz pK 4 „Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“ durch notwendige und sinnvolle Übungen in der Teilbarkeitslehre automatisch gefördert wird, steht außer Frage und liegt in der Natur der Sache.

Erstreckt sich das Unterrichten der Teilbarkeit nicht nur auf das Beibringen von formalen Regeln, sondern behält man die verständnisorientierte Beschäftigung als tragfähige Grundlage im Auge, wird klar, das in der Klasse 5/6 auch das „Problemlösen“ (pK 2) angemessen gefördert werden kann.

In der Unterstufe befinden sich Schülerinnen und Schüler in der Phase der konkreten Operationen, so dass nicht alle Aspekte der Problemlösekompetenz eine Rolle spielen. Hier einige Beispiele von Teilkompetenzen, die man zu diesem Zeitpunkt und im Kontext der Bruchrechnung fördern kann

- Informationen aus den gegebenen Texten, Bildern und Diagrammen entnehmen und auf ihre Bedeutung für die Problemlösung bewerten; (Textaufgaben)
- durch Verwendung verschiedener Darstellungen (informative Figur, verbale Beschreibung, Tabelle, Graph, symbolische Darstellung, Koordinaten) das Problem durchdringen
- durch Untersuchung von Beispielen und systematisches Probieren zu Vermutungen kommen
- das Problem auf Bekanntes zurückführen oder Analogien herstellen
- Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen Teilgebieten der Mathematik herstellen und zum Lösen nutzen
- durch Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten Lösungsschritte finden

Alle genannten Aspekte finden sich in drei Teilkompetenzen des Problemlösens wieder:

- Probleme analysieren,
- Strategien zum Problemlösen auswählen, anwenden und daraus einen Plan zur Lösung entwickeln,
- Die Lösung überprüfen und den Lösungsprozess reflektieren

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

**Beispiele von Unterrichtsfragen bzw. -aufgaben, mit denen die prozessbezogene Kompetenz „Probleme lösen“ beim Thema Teilbarkeit geschult werden kann:**

- 1 Tim behauptet, dass die Zahl 24 genau 7 Teiler hat und die Zahl 10 nur 3 Teiler hat.
  - a) Schreibe die Teilmenge auf.
  - b) Überprüfe Tims Behauptung. Wie könnte er darauf gekommen sein?
  
- 2 Findest du auch eine Zahl, die eine ungerade Anzahl von Teilern hat? Waran könnte das liegen?
  
- 3 a) Suche dir 4 Zahlen zwischen 25 und 100 und bestimme die Anzahl der Teiler. Beschreibe wie man alle Teiler am schnellsten und sichersten finden kann?  
 b) Findest du auch eine Zahl, die eine ungerade Anzahl von Teilern hat? Woran könnte das liegen?
  
- 4 Fülle die Platzhalter durch Ziffern so, dass Zahlen mit den angegebenen Eigenschaften entstehen
  - a) Die Zahl ist durch 4 teilbar.
 

(1) <input type="text"/> 72	(2) 1 <input type="text"/> 6	(3) 45 <input type="text"/>
-----------------------------	------------------------------	-----------------------------
  - b) Die Zahl ist durch 3 aber nicht durch 2 teilbar.
 

(1) 23 <input type="text"/>	(2) 4 <input type="text"/> 1 <input type="text"/>	(3) <input type="text"/> 83 <input type="text"/>
-----------------------------	---	--
  
- 5 Unten stehen 9 Eigenschaften, die eine Zahl haben könnte. Versuche nun eine Zahl zu finden, die möglichst viele der folgenden Eigenschaften erfüllt:
  - ♣ Sie ist mehr als zweistellig.
  - ♣ Es ist eine Quadratzahl.
  - ♣ Sie ist ein Vielfaches von 4.
  - ♣ Es ist eine gerade Zahl.
  - ♣ Sie ist kleiner als 400.
  - ♣ Alle Ziffern der Zahl sind Primzahlen.
  - ♣ Die Quersumme ist 3.
  - ♣ Sie enthält eine ungerade Ziffer.
  - ♣ Die Ziffern werden von links nach rechts größer

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

## „Probleme lösen“ am Beispiel der Bruchrechnung

Bei der Einführung in die Bruchrechnung steht der Aufbau einer Grundvorstellung, die mit den Brüchen, sowie ihren Operationen verbunden sind, klar im Vordergrund. Auch beim „Rechnen mit Brüchen“ wird auf dieses ganzheitlich angelegte Bruchverständnis zurückgegriffen. Dass durch den Umgang mit der formalen Bedeutung der Bruchschreibweise, ebenso wie bei der Ausführung der Grundrechenarten mit Brüchen die prozessbezogene Kompetenz pK 4 „Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“ durch notwendige und sinnvolle Übungen automatisch gefördert wird, steht außer Frage und liegt in der Natur der Sache.

Erstreckt sich das Unterrichten der Bruchrechnung nicht nur auf das Beibringen von formalen Algorithmen, sondern behält man die verständnisorientierte Beschäftigung mit den Brüchen als tragfähige Grundlage im Auge, wird klar, dass in der Klasse 5/6 auch das „Problemlösen“ (pK 2) angemessen gefördert werden kann.

In der Unterstufe befinden sich Schülerinnen und Schüler nach Piaget's Entwicklungsmodell in der Phase der konkreten Operationen, so dass nicht alle Aspekte der Problemlösekompetenz eine Rolle spielen.

Hier einige Beispiele von Teilkompetenzen, die man zu diesem Zeitpunkt und im Kontext der Bruchrechnung fördern kann

- Informationen aus den gegebenen Texten, Bildern und Diagrammen entnehmen und auf ihre Bedeutung für die Problemlösung bewerten; (Textaufgaben)
- durch Verwendung verschiedener Darstellungen (informative Figur, verbale Beschreibung, Tabelle, Graph, symbolische Darstellung, Koordinaten) das Problem durchdringen
- durch Untersuchung von Beispielen und systematisches Probieren zu Vermutungen kommen
- das Problem auf Bekanntes zurückführen oder Analogien herstellen
- Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen Teilgebieten der Mathematik herstellen und zum Lösen nutzen
- durch Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten Lösungsschritte finden

Alle genannten Aspekte finden sich in den drei Teilkompetenzen des Problemlösens wieder:

- Probleme analysieren,
- Strategien zum Problemlösen auswählen, anwenden und daraus einen Plan zur Lösung entwickeln,
- Die Lösung überprüfen und den Lösungsprozess reflektieren

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

## Beispiele von Unterrichtsfragen bzw. -aufgaben, mit denen die prozessbezogene Kompetenz „Probleme lösen“ in der Bruchrechnung geschult werden kann:

- Ordne die Brüche der Größe nach:  $\frac{1}{3}; \frac{3}{4}; \frac{1}{2}; \frac{5}{8}; \frac{3}{4}; \frac{1}{3}; \frac{2}{7}; \frac{1}{4}; \frac{2}{3}; \frac{7}{10}; \frac{1}{9}; \frac{5}{6}$   
(durch Untersuchung von Beispielen und systematisches Probieren zu Vermutungen kommen und diese auf Plausibilität überprüfen)
- Untersuche die Zahlenreihe  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$  Schritt für Schritt sowohl mit TR als auch mit einer Zeichnung (1 als Quadrat) und überlege, was passiert, wenn es immer so weitergeht.  
(durch Verwendung verschiedener Darstellungen (informative Figur, verbale Beschreibung, Tabelle, Graph, symbolische Darstellung, Koordinaten) das Problem durchdringen)
- Welcher Bruch steht für  $\square$ :  
a)  $\frac{7}{5} : \square = \frac{14}{25}$ ;      b)  $\square : \frac{7}{2} = -\frac{2}{21}$       c)  $\frac{1}{5}$  von  $\square =$       d)  $\frac{1}{\square}$  von  $99 = 9$   
(durch Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten Lösungsschritte finden)

- Magische Quadrate:  
a) Addiere jeweils die Brüche in den Zeilen, den Spalten und den Diagonalen.  
Fällt dir etwas auf?

$\frac{2}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$
$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{15}$

- Untersuche, ob die folgenden Quadrate ebenfalls magisch sind?

$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{7}{18}$
$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{2}$

$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{15}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{15}$
$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{5}$

- Hier fehlen Brüche.  
Ergänze so, dass die magische Zahl 1 erreicht wird

$\frac{10}{21}$		
		$\frac{11}{21}$
		$\frac{4}{21}$

(Ergebnisse, auch Zwischenergebnisse, auf Plausibilität oder an Beispielen prüfen)

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

- 5 Lucy sagt: Wenn mein Hund Duke  $\frac{1}{4}$  abnimmt, dann wiegt er noch 15 kg. Das ist 3 mal so viel, wie er als Welpen vor 4 Jahren wog.
- Wieviel wiegt Duke heute?
  - Wieviel hat er als Welpen gewogen?
  - Wieviel hat er durchschnittlich pro Jahr zugenommen.
- (durch Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten Lösungsschritte finden)**
- 6 Hat Tim einen Fehler gemacht?  
Er hat eine Aufgabe gerechnet:  $3 : \frac{1}{4}$  und hat die Rechenregeln angewandt.  
Als Ergebnis hat er 12 erhalten. Aber nun fragt er sich verwundert, wie das sein kann.  
„Ich habe doch „geteilt“ und mein Ergebnis ist größer als der Dividend?  
Kannst du Tim helfen? Finde ein passendes Beispiel, mit dem du Tim verständlich machen kannst, dass sein Ergebnis sinnvoll und richtig ist?  
**(Ergebnisse, auch Zwischenergebnisse, auf Plausibilität oder an Beispielen prüfen)**

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
				A
E	H	T	A	M

## „Probleme lösen“ am Beispiel Figuren

Der Geometrieunterricht ist traditionell als ein wichtiges Übungsfeld für das Problemlösen. Dabei ist ein Ziel ist, bei den Schülerinnen und Schülern die Freude am Problemlösen zu wecken und ihre Fähigkeit zum Lösen geometrischer Probleme zu fördern, durchaus in der berechtigten Hoffnung, dass sich damit auch ein positiver Transfer auf andere mathematische Bereiche einstellt.

In der Unterstufe befinden sich Schülerinnen und Schüler nach Piaget's Entwicklungsmodell in der Phase der konkreten Operationen, so dass nicht alle Aspekte der Problemlösekompetenz eine Rolle spielen.

Hier einige Beispiele von Teilkompetenzen, die man zu diesem Zeitpunkt und im Kontext der Figurenlehre fördern kann

- Informationen aus den gegebenen Texten, Bildern und Diagrammen entnehmen und auf ihre Bedeutung für die Problemlösung bewerten; (Textaufgaben)
- durch Verwendung verschiedener Darstellungen (informative Figur, verbale Beschreibung, Tabelle, Graph, symbolische Darstellung, Koordinaten) das Problem durchdringen
- durch Untersuchung von Beispielen und systematisches Probieren zu Vermutungen kommen
- das Problem auf Bekanntes zurückführen oder Analogien herstellen
- Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen Teilgebieten der Mathematik herstellen und zum Lösen nutzen
- durch Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten Lösungsschritte finden

Alle genannten Aspekte finden sich in drei Teilkompetenzen des Problemlösens wieder:

- Probleme analysieren,
- Strategien zum Problemlösen auswählen, anwenden und daraus einen Plan zur Lösung entwickeln,
- Die Lösung überprüfen und den Lösungsprozess reflektieren



M	A	T	H	E
A	Z			H
T		P		T
H			G	A
E	H	T	A	M

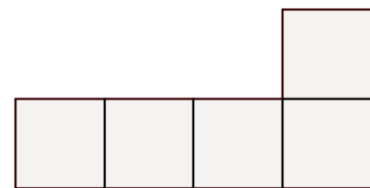
**Beispiele von Unterrichtsfragen bzw. -aufgaben, mit denen die prozessbezogene Kompetenz „Probleme lösen“ in der Geometrie geschult werden kann:**

- 1 Zerschneide die obere Figur mit einem Schnitt so, dass daraus die untere Figur zusammengesetzt werden kann.



- 2 Aus Streichhölzern sollen Quadrate gelegt werden. Wie viele Streichhölzer werden für 10 Quadrate benötigt?

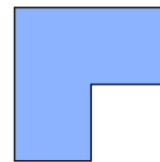
- 3 Aus 5 Quadraten (16 Streichhölzer) sollen durch das Umlegen von 3 Streichhölzern 4 Quadrate gebildet werden



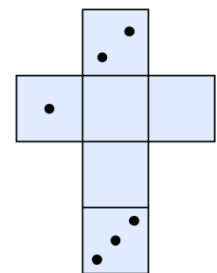
- 4 Aus drei gleichseitigen Dreiecken (9 Streichhölzer) sollen durch Umlegen von 2 Streichhölzern vier gleichseitige Dreiecke entstehen.



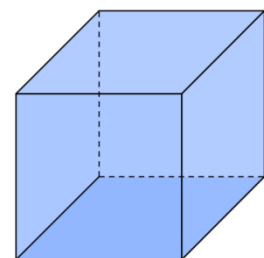
- 5 Zerlege die nebenstehende Figur in 4 deckungsgleiche Flächen.



- 6 Wenn du das nebenstehende Netz ausschneidest kannst du es zu einem Würfel zusammenfalten.  
Vervollständige nebenstehendes Würfelnetz, so dass die Summe der gegenüberliegenden Flächen immer 7 ergibt.  
Finde möglichst viele verschiedene Würfelnetze.



- 7 Nebenstehender angemalter Würfel wird mit drei geraden Schnitten in 8 gleichgroße Würfel zerteilt.  
Wie viele Flächen der kleinen Würfel sind unbemalt?



- 8 Unterteile ein beliebiges Quadrat in 6 kleinere Quadrate, ohne dass etwas übrig bleibt