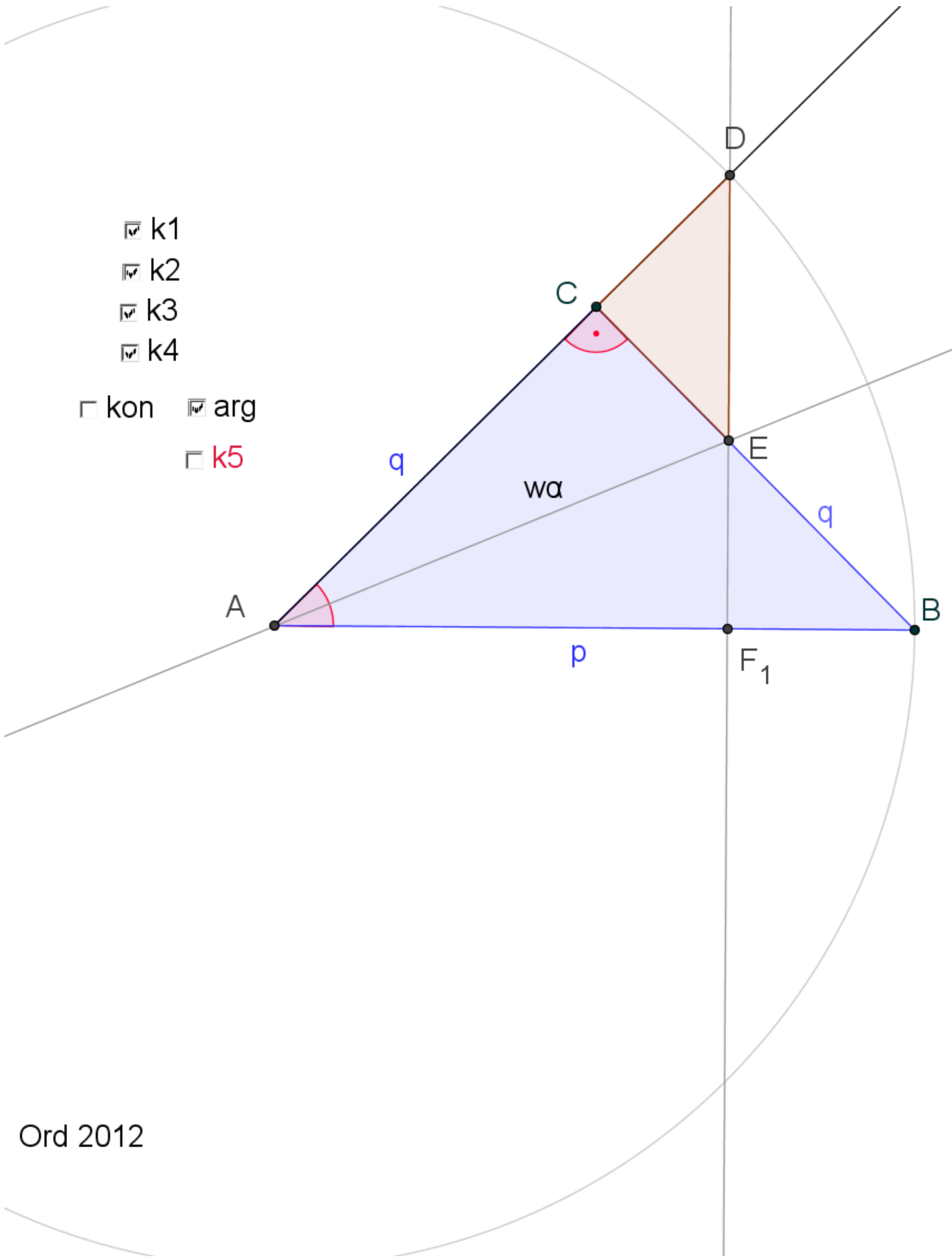


(1) Das Dreieck ABC ist gleichschenklig rechtwinklig.
Es gilt (z.B. nach dem Satz von Pythogras):

$$p^2 = 2q^2 \; bzw. \; \sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad (q < p < 2q)$$

Angenommen p und q sind natürliche Zahlen.
Dann können wir für unser Dreieck annehmen, dass p und q bereits die kleinstmöglichen Werte haben.
(Andernfalls wird der Bruch soweit wie möglich gekürzt.)

(2) Bestimme auf dem Strahl AC den Punkt D mit

$$\overline{AD} = \overline{AB} = p \quad \Rightarrow \quad \overline{CD} = p - q \; .$$

(3) Die Winkelhalbierende von α schneidet BC in E.

(4) Das Dreieck EDC geht bei der Spiegelung an der Winkelhalbierenden in das Dreieck EBF über.
Die beiden kongruenten Dreiecke sind gleichschenklig rechtwinklig . Warum?
Wie lang sind die Seiten im Dreieck EDC?

Es gilt:

$$\overline{ED}^2 = 2\overline{CE}^2 \; bzw. \; \sqrt{2} = \frac{\overline{ED}}{\overline{CE}}$$

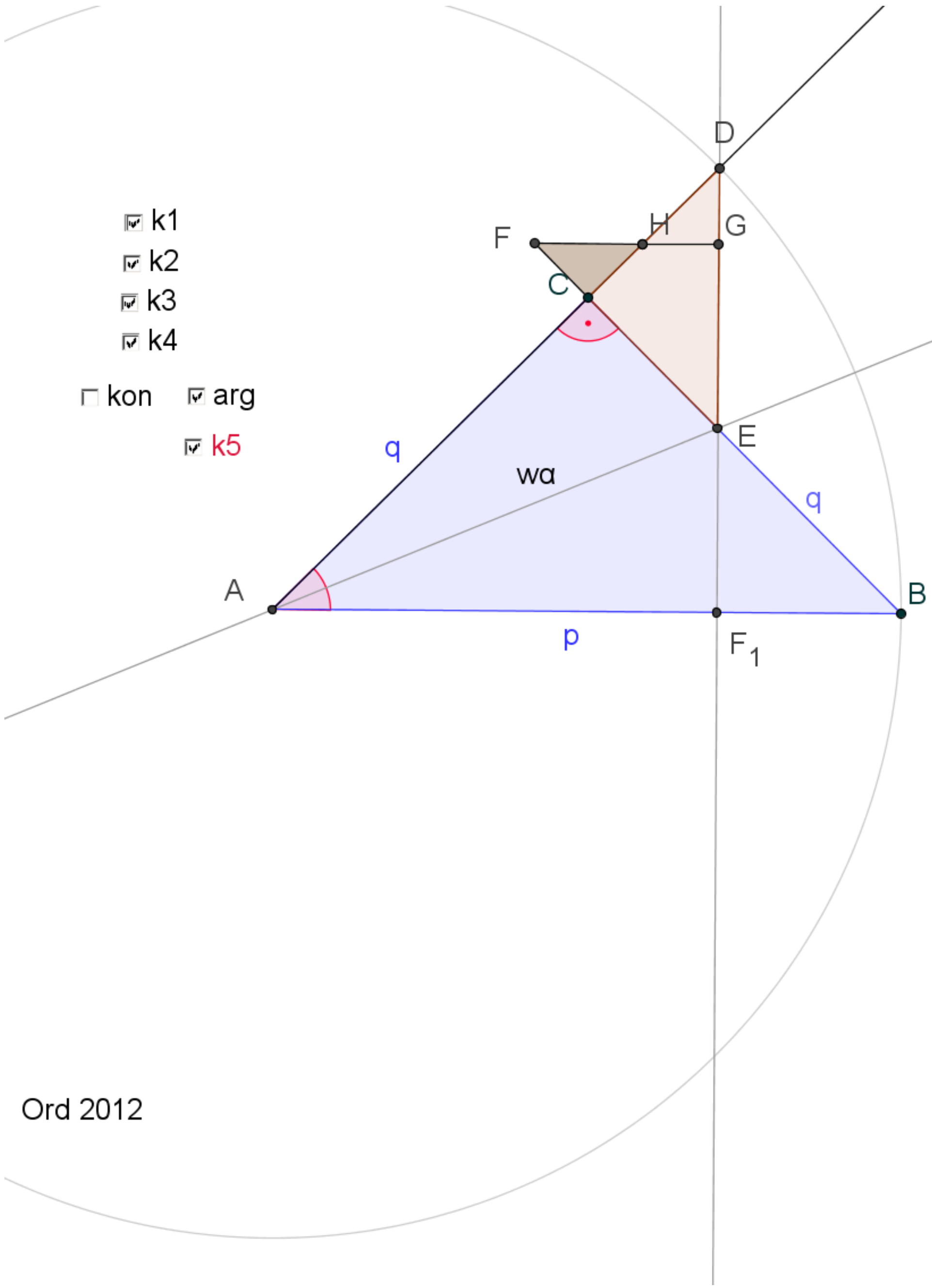
$$\overline{CE} = \overline{CD} = p - q$$

$$\overline{ED} = \overline{EB} = q - \overline{CE} = q - (p - q) = 2q - p$$

Die Seitenlängen des gl. rechtw. Dreiecks EDC sind somit ebenfalls natürliche Zahlen, wobei:

$$p - q < q \;\; (da \; p < 2q) \;\; und \;\; 2q - p < p \;\; (da \; 2q < 2p)$$

Widerspruch!



(1) Das Dreieck ABC ist gleichschenklig rechtwinklig.
Es gilt (z.B. nach dem Satz von Pythogras):

$$p^2 = 2q^2 \; bzw. \;\; \sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad (q < p < 2q)$$

Angenommen p und q sind natürliche Zahlen.
Dann können wir für unser Dreieck annehmen, ~~dass p und q bereits die kleinstmöglichen Werte haben. (Andernfalls wird der Bruch soweit wie möglich gekürzt.)~~

(2) Bestimme auf dem Strahl AC den Punkt D mit

$$\overline{AD} = \overline{AB} = p \quad \Rightarrow \quad \overline{CD} = p - q\ .$$

(3) Die Winkelhalbierende von α schneidet BC in E.

(4) Das Dreieck EDC geht bei der Spiegelung an der Winkelhalbierenden in das Dreieck EBF über.
Die beiden kongruenten Dreiecke sind gleichschenklig rechtwinklig . Warum?
Wie lang sind die Seiten im Dreieck EDC?

Es gilt:

$$\overline{ED}^2 = 2\overline{CE}^2 \;\; bzw. \;\; \sqrt{2} = \frac{\overline{ED}}{\overline{CE}}$$

$$\overline{CE} = \overline{CD} = p - q$$

$$\overline{ED} = \overline{EB} = q - \overline{CE} = q - (p - q) = 2q - p$$

Die Seitenlängen des gl. rechtw. Dreiecks EDC sind somit ebenfalls natürliche Zahlen, wobei:

$$\boldsymbol{q_1 = p - q < q \; (da \; p < 2q) \; und \; p_1 = 2q - p < p \; (da \; 2q < 2p)}$$

Zum Dreieck EDC ließe sich wieder ein kleineres gls. rechtw. Dreieck konstruieren, bei dem die Seitenlängen natürliche Zahlen sind mit

$$\boldsymbol{q_2 < q_1 \; und \; p_2 < p_1 \;\; usw.}$$

Ord 2012