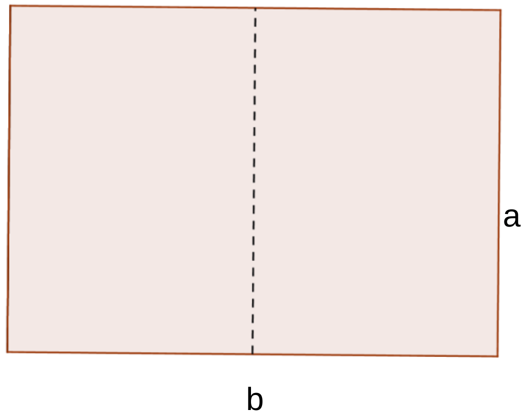
Papierfalten mit DIN –Blättern

(Ein genetischer Weg zur Irrationalität von $\sqrt{2}$)



1. Vorüberlegung

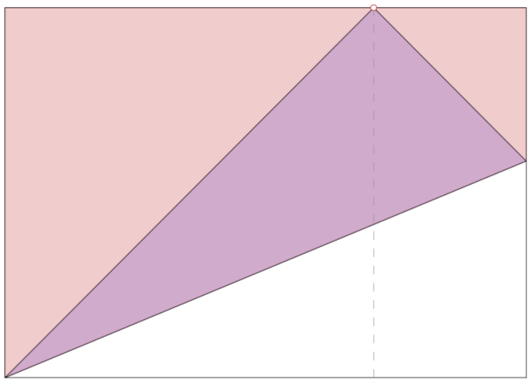
Rechtecke im **DIN** – Format haben die folgende Eigenschaft:
Halbiert man ein solches Rechteck parallel zur kürzeren Seite a, so sind die beiden Teilrechtecke **ähnlich** zum Ausgangsrechteck.
Begründe, dass für das Seitenverhältnis gilt:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{2}$$

(DIN S)
Info: Ein **DIN A0** Rechteck hat den Flächeninhalt 1 m^2.
Durch fortwährende Halbierung kommt man zu DIN A1, DIN A2, usw.
Wie groß sind jeweils die Seitenlängen?

---

2. Falt-Test mit einem DIN A4 –Blatt



a) Bestimme durch Falten die Winkelhalbierende des Winkels links unten.
Sie muss gleich lang sein, wie die längere Seite des Blattes (Warum?)
Überprüfe dies durch Falten (s. Figur).

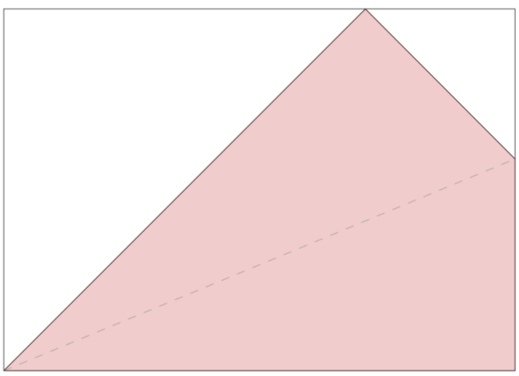
b) Begründe, dass das rechtwinklige Dreieck links oben gleichschenklig ist.

c) Begründe dass das rechtwinklige Dreieck rechts oben auch gleichschenklig ist.
Falte es um die Hypotenuse.

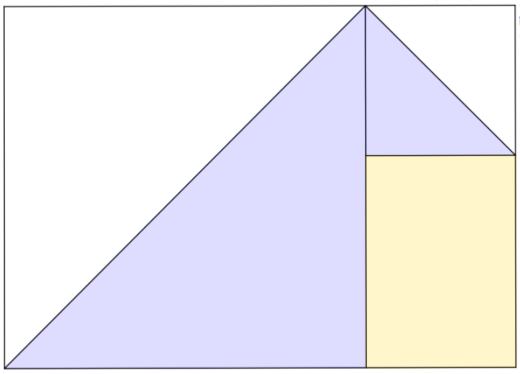
---

3. Falte nun das DIN- Blatt auf. Du siehst ein besonderes Viereck, nämlich?

Welche Seiten dieses Vierecks sind gleich lang?

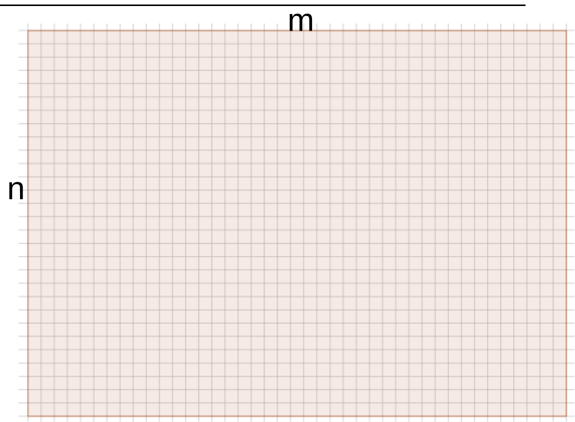


4. Wenn nun die beiden rechtwinkligen Dreiecke gefaltet werden wie abgebildet, so bleibt ein Restrechteck übrig.
Begründe, dass es ebenfalls DIN – Format hat.



---

5. Wir nehmen mal an, dass man das DIN A4 - Blatt mit lauter gleich großen quadratischen Karos randlos bedrucken kann.
Im Bild siehst Du das für 29 mal 41 Karos, und es scheint gut zu passen.
Falls es nicht ganz genau stimmt, nehmen wir an, dass es mit kleineren Quadraten in entsprechend größerer Zahl klappen würde, z.B. mit n mal m quadratischen Karos, wobei wir annehmen, dass **n und m die kleinsten natürliche Zahlen** sind, für die das möglich ist.



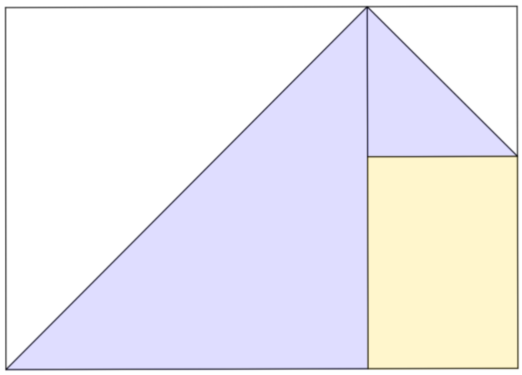
---

6. Das so bedruckte Blatt denken wir uns wie in Nummer 4 in zwei Quadrate und ein ebenfalls DIN-förmiges Rest-Rechteck zerlegt

a) Begründe, dass das linke Quadrat dabei randlos mit Karos überdeckt wird.

b) Begründe, dass auch das rechte Quadrat randlos mit Karos überdeckt wird.

c) Begründe, dass das **Restrechteck (gelb)** randlos mit Karos überdeckt wird.



Das Restrechteck kann mit n_1 mal m_1 Karos ausgelegt werden, wobei $n_1 < n$ und $m_1 < m$ gilt.
Dann hätte man aber das Ausgangsrechteck schon mit n_1 mal m_1 größeren Karos auslegen können!

Widerspruch, da n und m die kleinsten Zahlen mit dieser Eigenschaft waren.
Folgerung: Das DIN A4 Blatt lässt sich nicht randlos mit quadratischen Karos bedrucken!

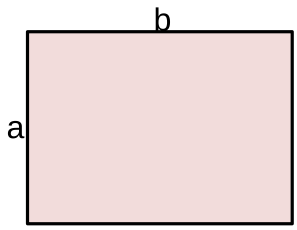
Andere Argumentationslinie: (DIN_B)

Hat man natürliche Zahlen n und m gefunden, für die sich das DIN A4 Blatt mit quadratischen Karos randlos bedrucken lässt, so gibt es dazu immer natürliche Zahlen $n_1 < n$ und $m_1 < m$ mit dieser Eigenschaft.

Zu n_1, m_1 gibt es mit der gleichen Überlegung Zahl $n_2 < n_1$ und $m_2 < m_1$ mit dieser Eigenschaft… usw. .

Man erhält unendliche Folge $n > n_1 > n_2 > n_3 > \dots$ und $m > m_1 > m_2 > m_3 > \dots$ natürlicher Zahlen mit dieser Eigenschaft.

Dies aber nicht möglich, da es nur endlich viele natürliche Zahlen kleiner als n und nur endlich viele natürliche Zahlen kleiner als m gibt.



Irrationalitätsbeweis für $\sqrt{2}$:

- Bei einem DIN – Blatt gilt für die Seitenlängen $\sqrt{2} = \frac{b}{a}$.

Angenommen $\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl.

- Dann muss sich $\sqrt{2}$ als Bruch darstellen lassen: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$,

  wobei m und n natürliche Zahlen sind.

- Dann könnte man aber ein DIN – Blatt herstellen mit den Seitenlängen $b = m\,LE$ und $a = n\,LE$ und dieses Blatt randlos mit n mal m quadratischen Karos mit der Seitenlänge 1 LE überdecken.

Dies aber nicht möglich. **Somit kann $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl sein.**

Quelle: Christian .Messner

Info

A0	84,1 × 118,9	***Vierfachbogen***
A1	59,4 × 84,1	***Doppelbogen***
A2	42,0 × 59,4	***Bogen***
A3	29,7 × 42,0	***Halbbogen***
A4	21,0 × 29,7	***Viertelbogen***
A5	14,8 × 21,0	***Blatt/Achtelbogen***
A6	10,5 × 14,8	***Halbblatt***
A7	7,4 × 10,5	***Viertelblatt***
A8	5,2 × 7,4	***Achtelblatt***
A9	3,7 × 5,2	
A10	2,6 × 3,7	