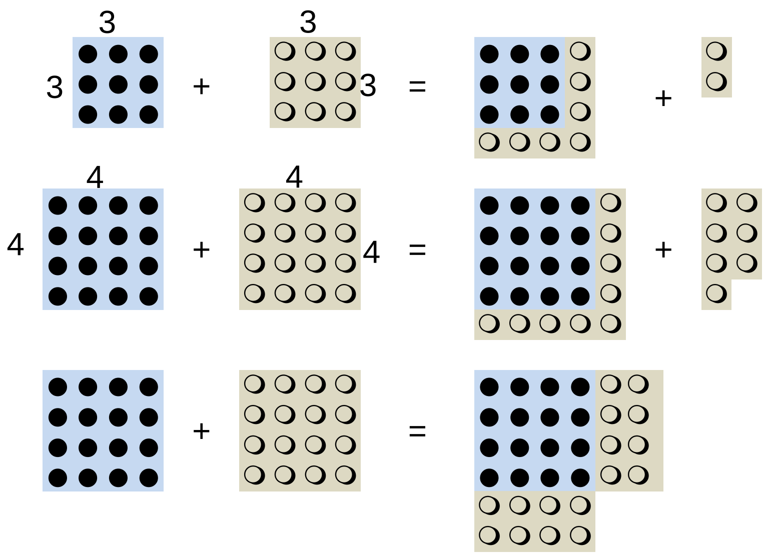
Wir suchen eine Quadratzahl, deren Doppeltes wieder eine Quadratzahl ist.

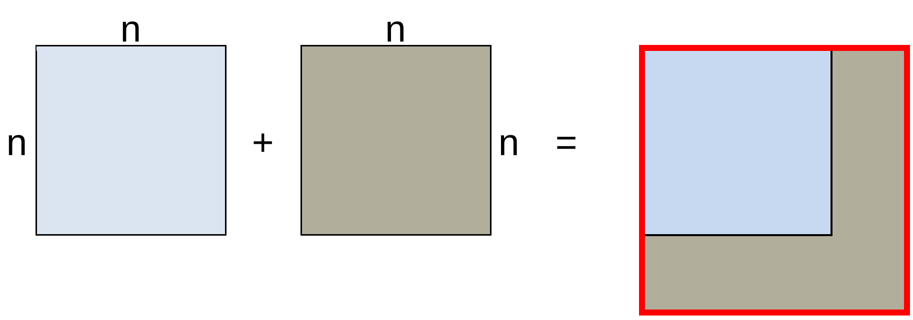
(Ein genetischer Nachweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$)-

(1) Martin versucht mit Spielsteinen zu überprüfen, ob es eine natürliche Zahl n gibt, für die $2 \cdot n^2$ eine Quadratzahl sein kann. Unten siehst Du seine Versuche für $n = 3$ und $n = 4$. Erkläre sein Vorgehen.
(*$2 \cdot n^2 = n^2 + n^2$, Ergänzen des ersten Quadrats durch die Steine des zweiten.*)

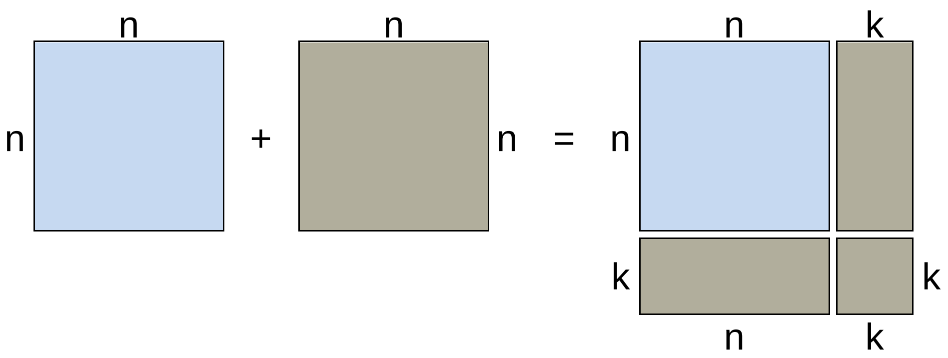


(2) Für n=3 und für n=4 ist das Doppelte von n^2 offenbar keine Quadratzahl. Für welche n klappt es?
Angenommen, Martin hätte beim schrittweisen Probieren tatsächlich eine natürliche Zahl n gefunden, bei der $2 \cdot n^2$ eine Quadratzahl ist.
Für alle natürlichen Zahlen kleiner als n hätte es noch nicht geklappt. D.h. diese Zahl n ist die kleinste mit der Eigenschaft, dass $2 \cdot n^2$ eine Quadratzahl ist.
Wie müsste dann das Ergebnis bei Martins Vorgehen aussehen?
Ergänze die Figur. (Steine sind jetzt nicht eingezeichnet.)

(*Rot umrahmte Figur finden lassen.)*

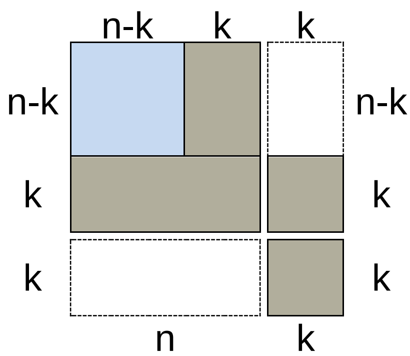


(3) Die blau und braun gefärbten Flächen enthalten gleich viele Spielsteine bzw. haben den gleichen Flächeninhalt.
Begründe, dass in der Figur $k < n$ sein muss.



(3) Überlege, wie man zu dieser Figur kommt. Begründe damit, dass $2k^2$ eine Quadratzahl sein muss.

(*Wegen der Flächengleichheit muss gelten* $2k^2 = (n-k)^2$)



(4) Aus der Annahme, dass n die kleinste Zahl ist, bei der $2n^2$ eine Quadratzahl ist, würde folgen, dass es eine noch kleinere Zahl k gibt, für die $2k^2$ eine Quadratzahl ist. Widerspruch!

Es gibt daher keine natürliche Zahl n, für die $2n^2$ eine Quadratzahl ist!

Andere Argumentationsschiene:

Hat man eine natürliche Zahl n gefunden, für die $2n^2$ eine Quadratzahl ist, so gibt es dazu immer eine natürliche Zahl $n_1<n$ mit dieser Eigenschaft.

Zu n_1 gibt es mit der gleichen Überlegung eine Zahl $n_2 < n_1$ mit dieser Eigenschaft… usw. .
Man erhält eine unendliche Folge $n > n_1 > n_2 > n_3 > \ldots$ natürlicher Zahlen mit dieser Eigenschaft.

Dies aber nicht möglich, da es nur endlich viele natürliche Zahlen kleiner als n gibt.

(5) Irrationalitätsbeweis für $\sqrt{2}$:

Angenommen, $\sqrt{2}$ ist rational: $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$.

Daraus folgt: $n = \sqrt{2} \cdot m$, und daraus: $n^2 = 2m^2$.

$2m^2$ kann aber keine Quadratzahl sein.

Also ist die Annahme falsch und $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl.

Nach Jahnke, T.: Wir suchen eine Quadratzahl, deren Doppeltes wieder eine Quadratzahl ist. In: JMD 1983,