Mögliche Fragestellungen zum Beweisen: Vorentlastungen

1. Multipliziere Primzahlen miteinander und addiere anschließend Eins.
   a) Probiere dies zunächst mit zwei Primzahlen.
   Was kann man über die Teiler des Ergebnisses sagen?
   Welche Teiler kommen nicht in Frage?
   b) Multipliziere jeweils aufsteigend immer eine Primzahl mehr, also
   $2 \cdot 3 + 1; 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1; 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1; 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1$
   Ist das Ergebnis immer eine Primzahl? Welche Teiler kommen in Frage?

2. Was passiert mit Teilern von Zahlen, wenn sie quadriert werden?
   a) Quadriere alle möglichen Endziffern einer Zahl und ermittle damit welche Endziffern sich dabei ergeben.
   Begründe, welche Aussagen Du nun nachgewiesen hast:
   - Ist eine Zahl gerade, so ist auch ihr Quadrat gerade.
   - Ist eine Zahl ungerade, so ist auch ihr Quadrat ungerade.
   - Ist das Quadrat einer Zahl gerade, so ist die Zahl vor dem Quadrieren auch gerade.
   - Ist eine Zahl durch 3, 4, 5, 10 teilbar, so ist auch ihr Quadrat durch 3, 4, 5, 10 teilbar.
   - Ist das Quadrat einer Zahl durch 3,4, 5, 10 teilbar, so ist die Zahl vor dem Quadrieren auch durch 3,4, 5, 10 teilbar.
   - Erkläre, was hiermit gezeigt wird: $(2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2) = 2n$
   - Und hiermit: $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1 = 2n + 1$

   b) Stelle die Primfaktorzerlegung für verschiedene Zahlen her.
   Quadriere die Zahlen und stelle die Primfaktorzerlegung erneut her.
   Was stellst Du fest? Kannst Du eine Regel formulieren?
   c) Weise nach: $\frac{128}{16}$ ist eine natürliche Zahl, $\frac{22}{3}$ aber nicht.

   Warum kann man dann ohne große Rechnung sagen, dass $\left(\frac{22}{3}\right)^2, \left(\frac{22}{3}\right)^3, \ldots$ auch keine natürlichen Zahlen sein können?