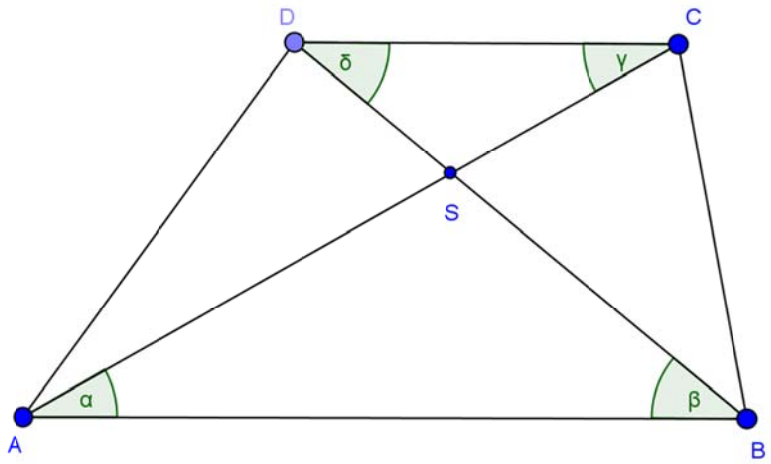
(Formales) Beweisen

Vorgehen beim formalen Beweisen:
0) Skizze anfertigen
1) Voraussetzung formulieren
2) Behauptung formulieren
3) Beweis führen (mit Angabe der verwendeten Sätze bzw. Eigenschaften)

Beweise:

Zeichnet man in einem Trapez die Diagonalen ein, so sind zwei der entstandenen Dreiecke ähnlich zueinander.

Skizze:



Voraussetzung: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

Behauptung: $\Delta\, ABS$ ist ähnlich zu $\Delta\, CDS$

Beweis: $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$ (Wechselwinkel an Parallelen)

$\Rightarrow$ $\Delta\, ABS$ ist ähnlich zu $\Delta\, CDS$ (Ähnlichkeitssatz ww)

q.e.d.

Wähle nun einen der Sätze auf der Rückseite aus, fertige eine Skizze an, formuliere Voraussetzung und Behauptung und führe dann den Beweis.

Benötigst du Hilfe? Dann stehen dir drei Hilfestufen zur Verfügung:

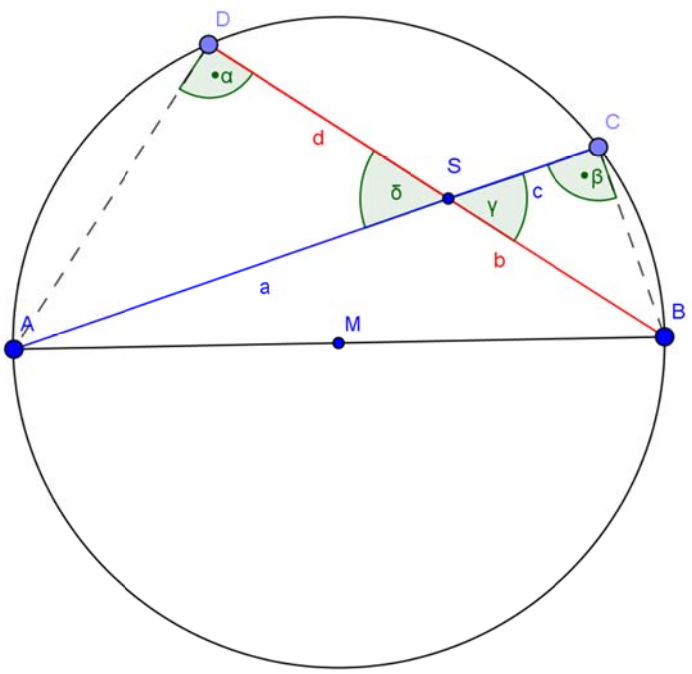
Beweisinspirationen nutzen — kleine Hilfe

Beweis ergänzen
Beweisschritte sortieren — große Hilfe

Spezieller Sehnensatz:

Ist die Strecke $\overline{AB}$ der Durchmesser eines Kreises und schneiden sich zwei von den Punkten A und B ausgehende Sehnen im Punkt S, so ist das Produkt der Längen der dadurch gebildeten Teilstrecken auf der einen Sehne gleich dem Produkt der Längen der Teilstrecken auf der anderen Sehne.

Skizze:



Voraussetzung: $\overline{AB}$ ist der Durchmesser eines Kreises
C und D liegen auf dem Halbkreis über $\overline{AB}$

Behauptung: $a \cdot c = b \cdot d$

Beweis: $\gamma = \delta$ (Scheitelwinkel)

und $\alpha = \beta = 90°$ (Satz des Thales)

$\Rightarrow$ $\Delta\, ASD$ ist ähnlich zu $\Delta\, BCS$ (Ähnlichkeitssatz ww)

$\Rightarrow$ $\frac{c}{d} = \frac{b}{a}$ $\quad |\cdot d; \cdot a$

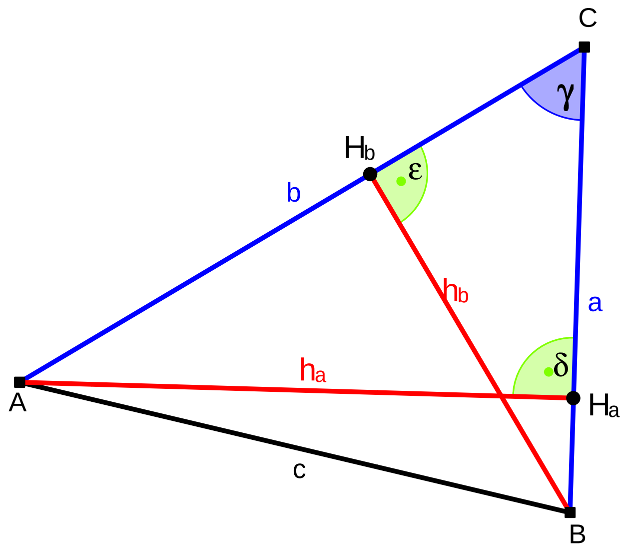
$c \cdot a = b \cdot d$

q.e.d.

Höhenverhältnisse im Dreieck:

Das Verhältnis der Längen zweier Höhen entspricht dem Kehrwert aus dem Verhältnis der Längen der zugehörigen Seiten.

Skizze:



Voraussetzung: $h_a \perp a;\ h_b \perp b$

Behauptung: $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$

Beweis: $\gamma = \gamma$

und $\delta = \varepsilon = 90°$ (Höhe im Dreieck)

$\Rightarrow$ $\Delta\, AH_aC$ ist ähnlich zu $\Delta\, BCH_b$ (Ähnlichkeitssatz ww)

$\Rightarrow$ $\frac{h_a}{b} = \frac{h_b}{a}$ $\quad |\cdot b; : h_b$

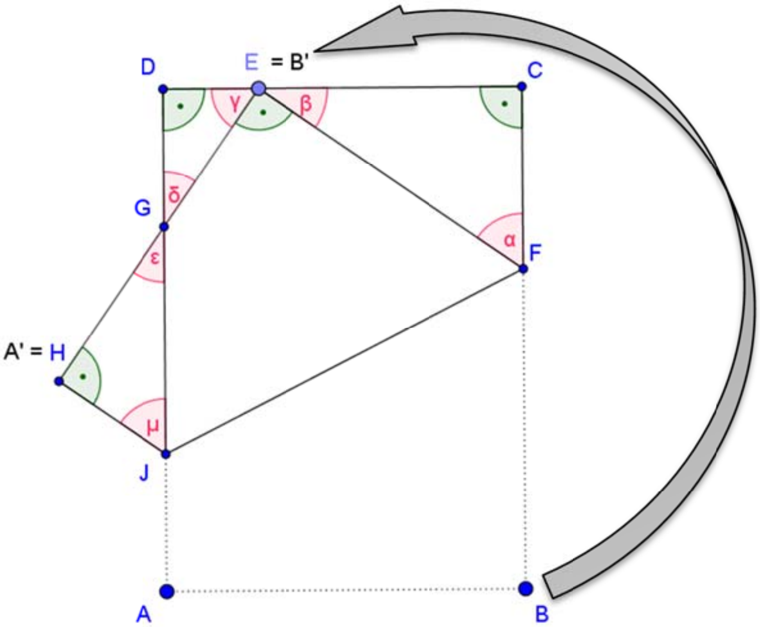
$\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$

q.e.d.

Rechteck falten:

Falte ein DIN A4-Blatt (Hochformat) so, dass die rechte untere Ecke auf der oberen Kante zu liegen kommt. Es entstehen drei Dreiecke.
Zeige, dass die entstandenen Dreiecke zueinander ähnlich sind.

Skizze:



Voraussetzung: Viereck ABCD ist ein Rechteck

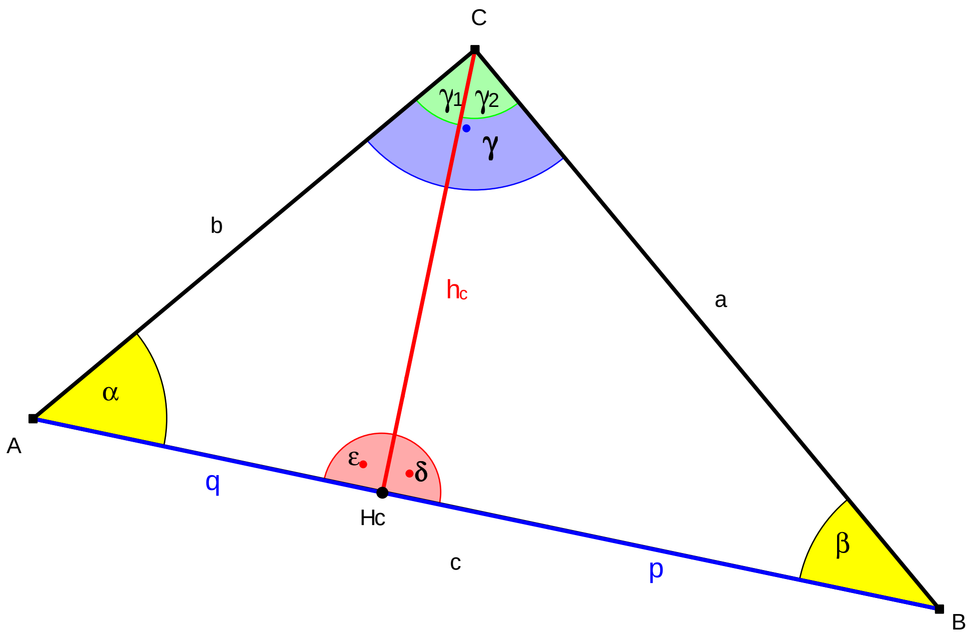
Behauptung: Die Dreiecke EFC und GED und JGH sind ähnlich zueinander

Beweis:	$\sphericalangle GDE = \sphericalangle JHG \ = \ 90°$		(Ecke im Rechteck)
und	$\delta = \varepsilon$		(Scheitelwinkel)
$\Rightarrow$	$\Delta\ GED$ ist ähnlich zu Δ JGH		(Ähnlichkeitssatz ww)
	$\sphericalangle GDE = \sphericalangle ECF \ = \ 90°$	(1)	(Ecke im Rechteck)
	$\gamma + 90° + \beta = 180°$		(Nebenwinkel)
	$\alpha + 90° + \beta = 180°$		(Winkelsumme im Dreieck)
$\Rightarrow$	$\gamma \ = \ \alpha$	(2)	
(1) und (2) $\Rightarrow$	$\Delta\ GED$ ist ähnlich zu Δ EFC		(Ähnlichkeitssatz ww)
		q.e.d.	

Höhensatz:

Im rechtwinkligen Dreieck gilt:
Das Produkt der Längen der Hypotenusenabschnitte ist gleich dem Quadrat der Länge zugehörigen Höhe.

Skizze:



Voraussetzung: $h_c \perp c\,;\gamma\ =\ 90°$

Behauptung: $p \cdot q = {h_c}^2$

Beweis: $\delta\ =\ \varepsilon\ =\ 90°$ (Höhe im Dreieck)

und $\gamma_1\ = 180° - 90° - \alpha\ = 180° - \gamma - \alpha = \beta$ (Winkelsumme im Dreieck)

und $\gamma_2\ = 180° - 90° - \beta\ = 180° - \gamma - \alpha = \alpha$ (Winkelsumme im Dreieck)

$\Rightarrow$ $\Delta\, AH_cC$ ist ähnlich zu $\Delta\, BCH_c$ (Ähnlichkeitssatz ww)

$\Rightarrow$ $\frac{q}{h_c} = \frac{h_c}{p}$ $\quad |\cdot p; \cdot h_c$

$q \cdot p = {h_c}^2$

q.e.d.