# Gruppenpuzzle „Pythagoras-Beweise“

## Arbeitsanweisung für die Stammgruppe

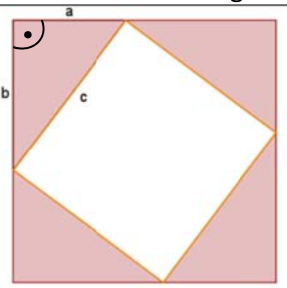
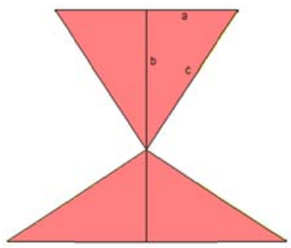
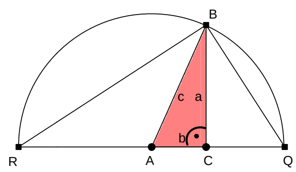
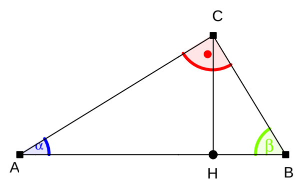
### 1) <u>Skizze, Voraussetzung, Behauptung</u>

| |
|---|
| Satz des Pythagoras:<br>Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann ist die Summe der Flächeninhalte der beiden Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse. |

Erstellt eine (beschriftete) Skizze, formuliert Voraussetzung und Behauptung mathematisch-formal.

Es gibt über 400 verschiedene Beweisführungen zum Satz des Pythagoras. Vier davon sollt ihr in Expertengruppen führen.

### 2) <u>Experteneinteilung</u>

| **Experte 1 *** | **Experte 2 **** | **Experte 3 **** | **Experte 4 ***** |
|---|---|---|---|
| Beweis über Flächenberechnungen | Beweis über Flächenberechnungen | Beweis mithilfe des Satzes von Thales | Beweis über Ähnlichkeit |
|  |  |  |  |

### 3) <u>Arbeit in den Expertengruppen</u>

### 4) <u>Präsentation im Plenum</u>

Erläutert euren Beweis. Die anderen Experten achten kritisch darauf, ob Beweislücken vorliegen.

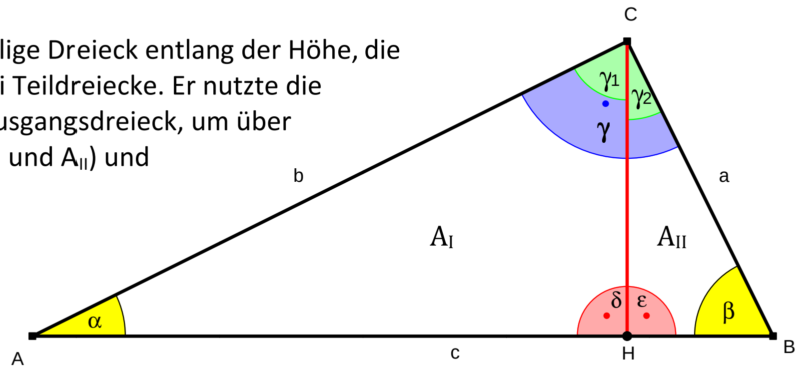
### 5) <u>Rückkehr in die Stammgruppen</u>

Auf der Rückseite findet ihr einen Beweis zum Satz des Pythagoras, den Albert Einstein geführt hat:

- Erläutert euch gegenseitig den ersten Beweisschritt.
- Formuliert analog zum ersten Schritt den zweiten Beweisschritt.
- Formt im dritten Beweisschritt die Gleichung so um, dass sich der Satz des Pythagoras ergibt.

# Beweis nach Albert Einstein

Albert Einstein zerlegte das rechtwinklige Dreieck entlang der Höhe, die orthogonal zur Hypotenuse ist, in zwei Teildreiecke. Er nutzte die Ähnlichkeit dieser Teildreiecke zum Ausgangsdreieck, um über die Flächeninhalte der Teildreiecke ($A_I$ und $A_{II}$) und des Ausgangsdreiecks $A_{ges}$ die Formel $a^2 + b^2 = c^2$ algebraisch herzuleiten.




Beweis:

<u>1) Ähnlichkeit der Dreiecke $\Delta AHC$ und $\Delta ABC$</u>

$\delta = \gamma = 90°$ (1)

$\alpha + \gamma_1 + 90° = 180°$ (Winkelsumme im Dreieck)

$\alpha + \beta + 90° = 180°$ (Winkelsumme im Dreieck)

$\Longrightarrow \quad \beta = \gamma_1$ (2)

(1), (2) $\Longrightarrow$ $\Delta AHC$ ist ähnlich zu $\Delta ABC$ (Ähnlichkeitssatz ww)

$$\Longrightarrow \quad A_\mathrm{I} = \left(\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}}\right)^2 \cdot A_\mathrm{ges}$$

---

<u>2) Ähnlichkeit der Dreiecke $\Delta BCH$ und $\Delta ABC$</u>

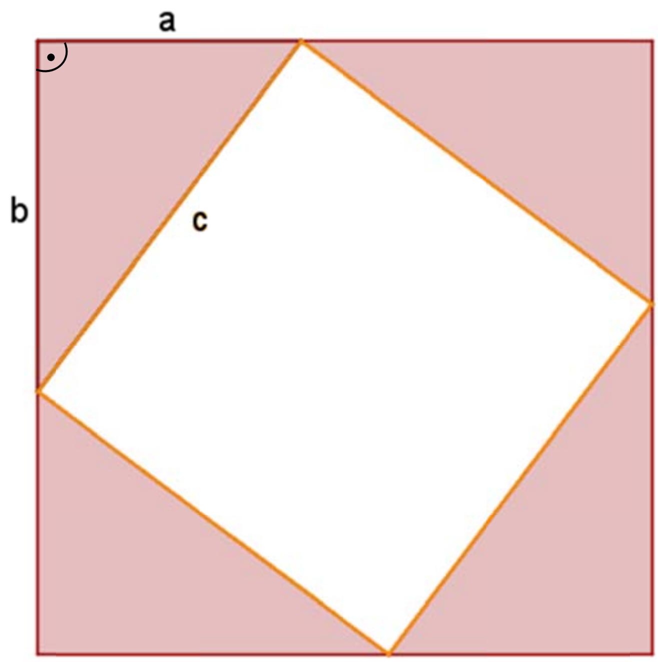
---

<u>3) Summe der Flächeninhalte der Teildreiecke = Flächeninhalt des Ausgangsdreiecks</u>

$$A_\mathrm{I} \quad + \quad A_\mathrm{II} \quad = A_\mathrm{ges}$$

$$\left(\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}}\right)^2 \cdot A_\mathrm{ges} + \left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{c}}\right)^2 \cdot A_\mathrm{ges} = A_\mathrm{ges}$$

# Expertengruppe 1
# Beweis über Flächenvergleich

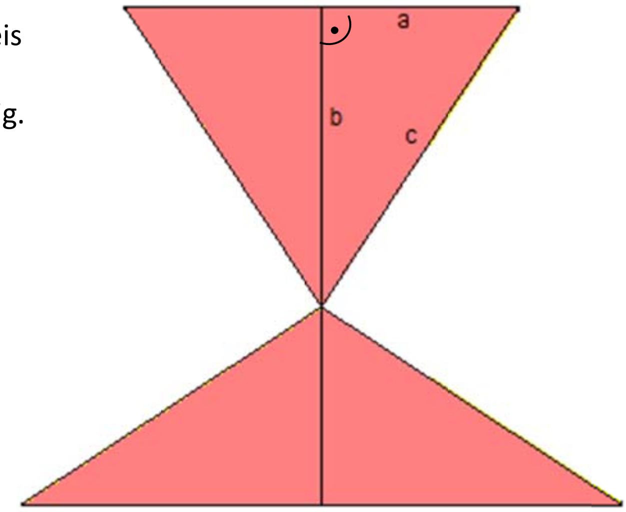



Vier kongruente rechtwinklige Dreiecke werden so angeordnet, dass sie ein Quadrat „mit Loch“ bilden.

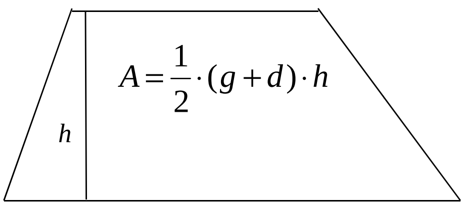
**TIPP:**
Für den Flächeninhalt des Quadrats (samt „Loch“) lassen sich zwei unterschiedliche Terme aufstellen.

# Expertengruppe 2
# Beweis über Flächenvergleich

Mithilfe der nebenstehenden Figur kann der Beweis zum Satz des Pythagoras geführt werden.
Die roten Dreiecke sind kongruent und rechtwinklig.




**TIPP:**
Im Verlauf des Beweises wird die Formel für den Flächeninhalt eines Trapezes benötigt:



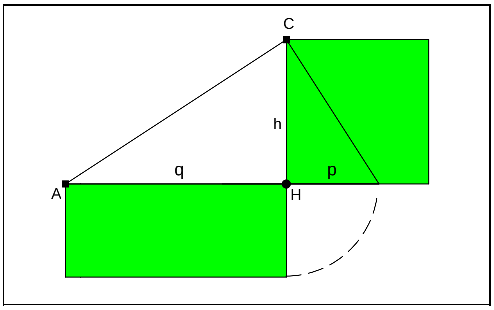

$$A = \frac{1}{2} \cdot (g + d) \cdot h$$

# Expertengruppe 3
# Beweis mit Hilfe des Satzes von Thales

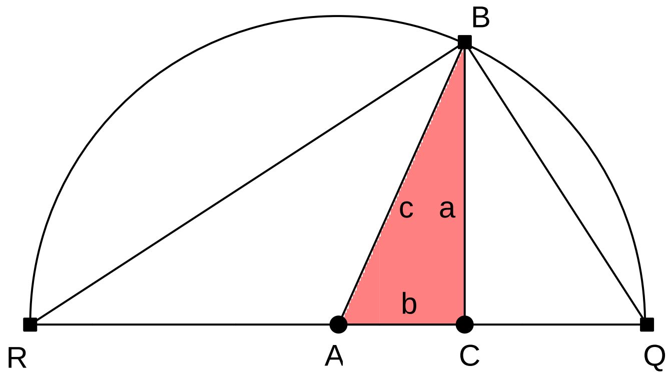
Nutze als Voraussetzung den **Höhensatz:**

In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe des Dreiecks flächengleich zu dem Rechteck aus den beiden zugehörigen Hypotenusenabschnitten:

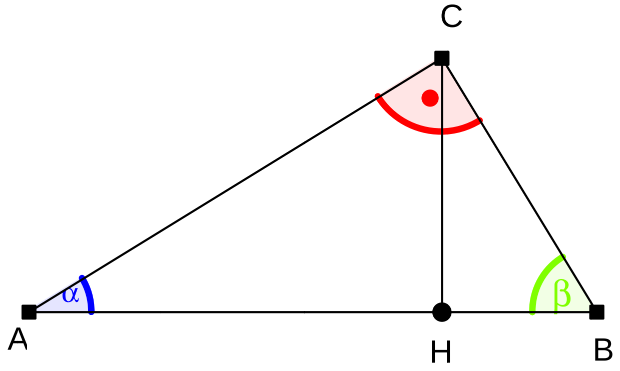
$$h^2 = p \cdot q.$$




Ein rechtwinkliges Dreieck wird gemäß nebenstehender Abbildung in einen Halbkreis mit Radius c eingepasst.



# Expertengruppe 4
# Beweis mit Hilfe der Ähnlichkeit




Ein rechtwinkliges Dreieck lässt sich durch seine Höhe in zwei Teildreiecke zerlegen, die zueinander und zum Ausgangsdreieck ähnlich sind.

**TIPP:**

- Begründet die Ähnlichkeit der Dreiecke ABC, CAH und BCH.

- Durch Aufstellen entsprechender Seitenverhältnisse können die **Kathetensätze** beweisen werden.

  Kathetensätze: $b^2 = c \cdot q$
  $a^2 = c \cdot p$

Beweisinspirationen Expertengruppe 1:

✂ – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · –

1) Beschrifte die restlichen Dreiecks- und Quadratseiten.
2) Beschrifte auch alle Winkel.
3) Kannst du dir sicher sein, dass das innere Viereck (das „Loch“) ein Quadrat sein muss? Begründe!

✂ – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · –

4) Welche Kantenlänge hat das äußere Quadrat?
   Stelle damit einen Term für den Flächeninhalt des äußeren Quadrats auf.
5) Das äußere Quadrat ist in fünf Teilfiguren zerlegt.
   Stelle Terme für die Flächeninhalte der Teilfiguren auf.

✂ – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · –

6) Der Flächeninhalt des äußeren Quadrats ist die Summe der Flächeninhalte der Teilfiguren.
7) Diese Summe und der Term aus 4) müssen gleich sein.
8) Algebraische Umformungen helfen dir weiter, um die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ zu erhalten.

Beweisinspirationen Expertengruppe 2:

1) Beschrifte die restlichen Dreiecksseiten und markiere und benenne alle auftretenden Winkel. Achte insbesondere auf rechte Winkel.
2) Begründe, welche Seiten jeweils gleichlang sind.
3) Begründe, wo rechte Winkel vorliegen.

✂ – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · –

4) Stelle den Flächeninhalt des Trapezes als Summe der Flächeninhalte der sechs Teildreiecke dar.
5) Stelle den Flächeninhalt des Trapezes mit Hilfe der Formel dar.

Beweisinspirationen Expertengruppe 3:

✂ – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · –

1) Das Dreieck RQB ist rechtwinklig – warum?
2) Formuliere für das Dreieck RQB den Höhensatz.

✂ – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · –

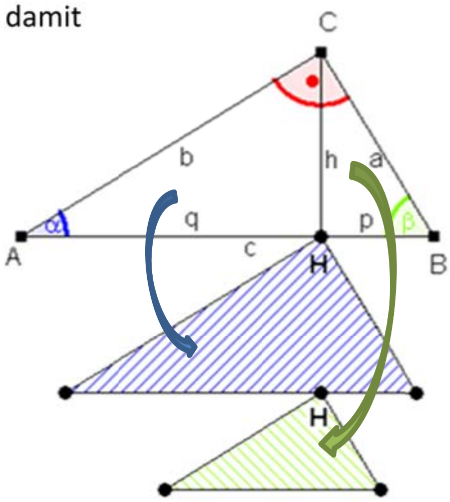
3) Drücke die Höhe und die Hypotenusenabschnitte im Dreieck RQB mit den Variablen a, b und c aus. Erinnere dich daran, dass der Radius des Halbkreises gleich c ist.
4) Algebraische Umformungen helfen dir weiter, um die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ zu erhalten.

Beweisinspirationen Expertengruppe 4:

1) Suche gleiche Winkel, um die Ähnlichkeit der Dreiecke zu begründen.

✂ – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · –

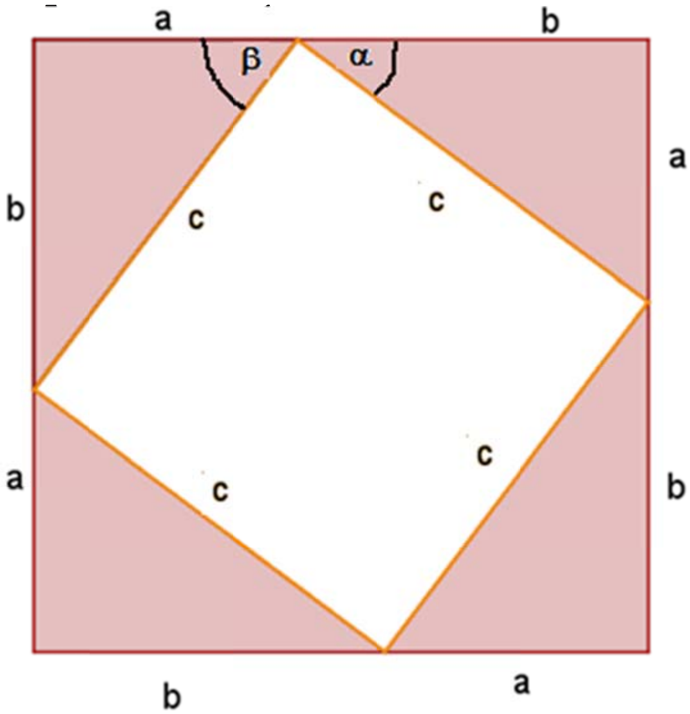
2) Die ähnlichen Teildreiecke können nach unten geklappt werden, damit die Seitenverhältnisse besser ersichtlich werden.
Beschrifte in der nebenstehenden Figur alle Punkte und Seiten.



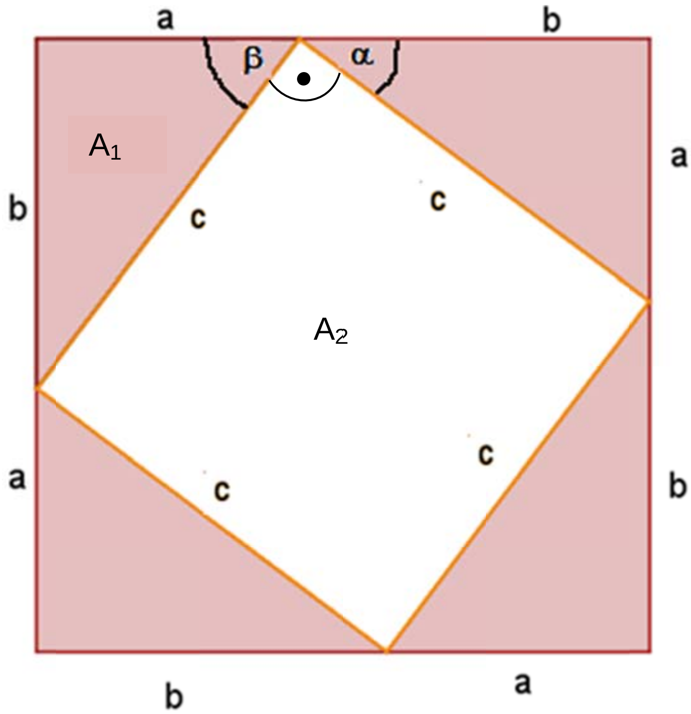

✂ – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · –

3) Die Seitenverhältnisse von Kathete zu Hypotenuse sind in den drei Dreiecken jeweils gleich. Hieraus ergeben sich zwei Verhältnisgleichungen, die zu den Kathetensätzen führen.
4) Algebraische Umformungen helfen dir weiter, um die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ zu erhalten.

Beweislupe 1 Expertengruppe 1:



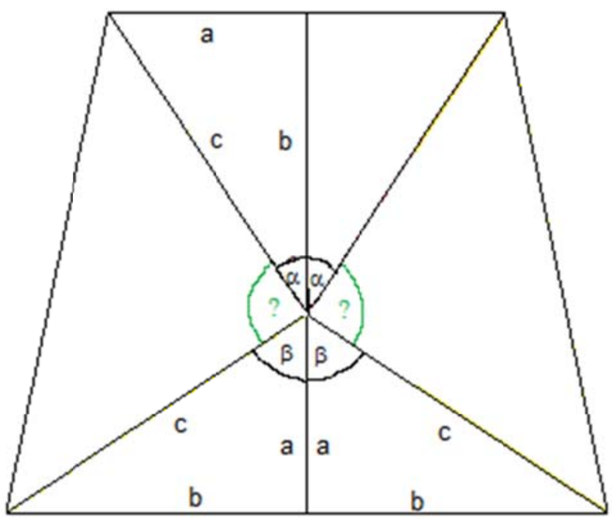

Beweislupe 2



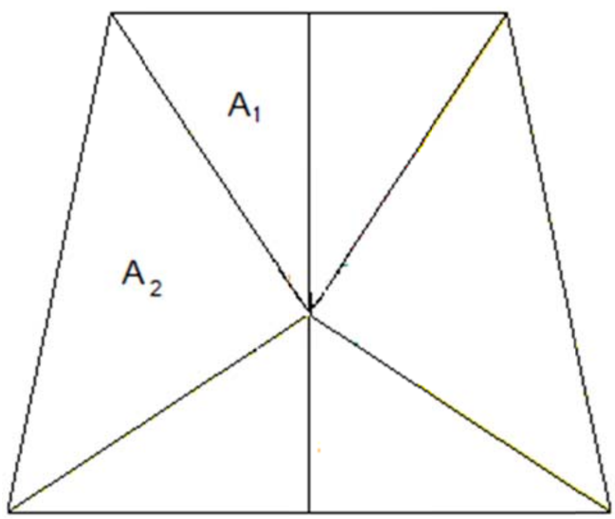

$A_{ges}$ = (1)

$A_{ges}$ = (2)

Beweislupe 1 Expertengruppe 2:



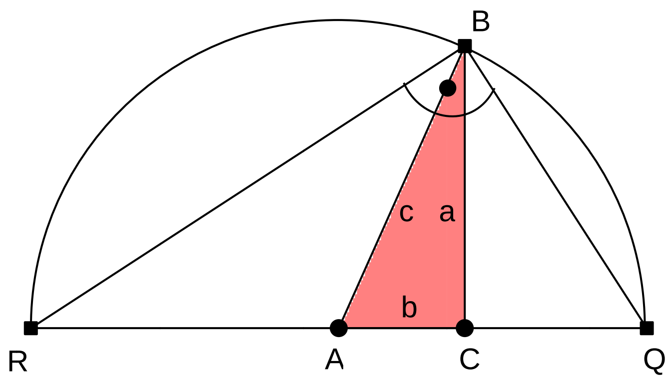

Beweislupe 2 Expertengruppe 2:



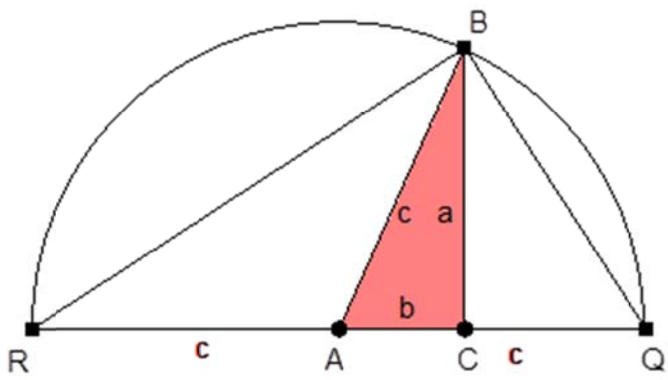

$A_{ges}$ = (1)

$A_{ges}$ = (2)

Beweislupe 1 Expertengruppe 3:
Expertengruppe 3:

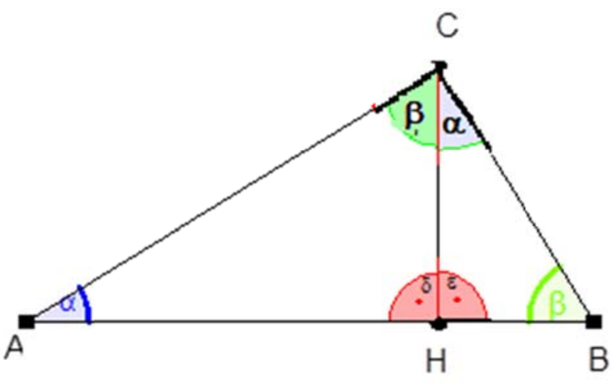



Beweislupe 2




$a^2 =$

Beweislupe 1 Expertengruppe 4:




Beweislupe 2 Expertengruppe 4: