

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

# Lineare Gleichungssysteme im Basis- und Leistungsfach

Achim Pfeiffer - Sabine Schray

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Basisfach

Leistungsfach

Fazit

## Bildungsplan 2016 für das Basisfach

### Lineare Gleichungssysteme untersuchen

- (9) das *Gaußverfahren*, auch in Matrixschreibweise, auf *lineare Gleichungssysteme* ohne Parameter bis zur Stufenform anwenden
- (10) die Lösungsmultifalt *linearer Gleichungssysteme* ohne Parameter angeben und im Falle eindeutiger Lösbarkeit deren Lösung bestimmen

**P** 2.4 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen 5, 8

# Lineare Gleichungssysteme

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Basisfach

Leistungsfach

Fazit

## Lineare Gleichungssysteme untersuchen

- (9) das *Gaußverfahren*, auch in Matrixschreibweise, auf *lineare Gleichungssysteme* ohne Parameter bis zur Stufenform anwenden
- (10) die Lösungsvielfalt *linearer Gleichungssysteme* ohne Parameter angeben und im Falle eindeutiger Lösbarkeit deren Lösung bestimmen

**P** 2.4 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen 5, 8

Untersuchen Sie folgende lineare Gleichungssysteme gemäß den **Vorgaben des Basisplans** ...

- Umformen mit dem Gaußverfahren bis zur Stufenform
- „Lösungsvielfalt“ statt „Lösungsmenge“
- Konkrete Angabe der „Lösung“ nur im Fall eindeutiger Lösung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Basisfach

Leistungsfach

Fazit

## Was fällt auf?

- Umformen mit dem Gaußverfahren bis zur Stufenform
- „Lösungsvielfalt“ statt „Lösungsmenge“
- Konkrete Angabe der „Lösung“ nur im Fall eindeutiger Lösung
- Entsprechende Fragestellung ...
- Darüber hinaus geht es um ein **Verständnis der auftretenden Möglichkeiten**

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Basisfach

Leistungsfach

Fazit

## Was lässt sich daraus folgern?

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \\ & & & & 5x_2 & - & 11x_3 & = & -5 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & = & 0 \end{array}$$

- Eine „Nullzeile“ und in keiner der beiden anderen Zeilen steht eine falsche Aussage.
- Das lineare Gleichungssystem hat **unendlich viele Lösungen**.
- Eine Notation der Lösungsmenge wird nicht erwartet.

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Basisfach

Leistungsfach

Fazit

## Was lässt sich daraus folgern?

$$\begin{array}{rclcl} 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 & & 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 & & \\ 0x_1 - 0x_2 - 0x_3 = 0 & \text{bzw.} & & & 0 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 & & & & 0 = 0 \end{array}$$

- Zwei „Nullzeilen“
- Das lineare Gleichungssystem hat **unendlich viele Lösungen.**
- Eine Notation der Lösungsmenge wird nicht erwartet.

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Basisfach

Leistungsfach

Fazit

## Was lässt sich daraus folgern?

$$\begin{array}{rclcl} 3x_1 + & x_2 + & 5x_3 = & 2 & 3x_1 + & x_2 + & 5x_3 = & 2 \\ 0x_1 - & 0x_2 - & 0x_3 = & 1 & \text{bzw.} & & & 0 = 1 \\ 0x_1 + & 0x_2 + & 0x_3 = & 0 & & & & 0 = 0 \end{array}$$

- Man erhält eine „Nullzeile“ und in einer Zeile steht eine falsche Aussage.
- Das lineare Gleichungssystem hat **keine Lösung**.

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Basisfach

Leistungsfach

Fazit

## Interpretationen

- Es wird nicht erwartet, dass die Schülerinnen und Schüler die entsprechende Lösungsvielfalt geometrisch interpretieren können.
- • •
- Eine geometrische Interpretation kann bei der Unterscheidung der Fälle im Unterricht aber hilfreich sein.

**Reduktion  
der Inhalte**



M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Basisfach

Leistungsfach

Fazit

## Interpretation anhand der verbleibenden Gleichungen

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -1 \\5x_2 - 11x_3 &= -5 \\0 &= 0\end{aligned}$$

- Die beiden verbleibenden Gleichungen sind Ebenengleichungen.
- Diese beiden Ebenen sind nicht parallel.
- Sie schneiden sich in einer Geraden. Damit hat das LGS unendlich viele Lösungen.

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Basisfach

Leistungsfach

Fazit

## Interpretation anhand der ursprünglichen Gleichungen

$$\begin{aligned}3x_1 + x_2 + 5x_3 &= 2 \\ -6x_1 - 2x_2 - 10x_3 &= -4 \\ 9x_1 + 3x_2 + 15x_3 &= 6\end{aligned}$$

- Die drei Gleichungen sind Ebenengleichungen.
- Diese Ebenen sind identisch.
- Damit hat das LGS unendlich viele Lösungen.

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Basisfach

Leistungsfach

Fazit

## Interpretation anhand der ursprünglichen Gleichungen

$$\begin{aligned}3x_1 + x_2 + 5x_3 &= 2 \\ -6x_1 - 2x_2 - 10x_3 &= -3 \\ 9x_1 + 3x_2 + 15x_3 &= 6\end{aligned}$$

- Die drei Gleichungen sind Ebenengleichungen.
- Zwei der Ebenen sind identisch, die dritte Ebene ist parallel dazu.
- Damit hat das LGS keine Lösung.

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Basisfach

Leistungsfach

Fazit

## Mögliche Aufgabenstellungen im Basisfach

- Bestimme die eindeutige Lösung des LGS.
- Untersuche, ob das LGS eindeutig lösbar ist.
- Untersuche, ob das LGS eine eindeutige Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen hat.
- Untersuche das folgende LGS.

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Basisfach

Leistungsfach

Fazit

## Bildungsplan 2004

### 2. LEITIDEE „ALGORITHMUS“

- in einfachen Fällen Grenzwerte bestimmen;
- zusammengesetzte Funktionen ableiten;
- in einfachen Fällen Stammfunktionen angeben;
- lineare Gleichungssysteme auf Lösbarkeit untersuchen; die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems bestimmen.

#### *Inhalte*

- *Ableitungsregeln für Produkt, Verkettung*
- *Stammfunktion (Summe, konstanter Faktor, lineare Substitution)*
- *Gauß-Algorithmus*

# Lineare Gleichungssysteme

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Basisfach

Leistungsfach

Fazit

Die Lösung linearer Gleichungssysteme beinhaltet:

- Angabe der Lösungsmenge auch bei unendlichen vielen Lösungen (Angabe der „Schnittgerade“)
- Geometrische Interpretationen
- Lineare Gleichungssysteme mit Parametern

erhöhter Komplexitäts-,  
Vertiefungs-, Präzisierungs-  
und Formalisierungsgrad

# Lineare Gleichungssysteme

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Basisfach

Leistungsfach

Fazit

Ziel im Leistungsfach ist es, einen erhöhten Komplexitäts- und Formalisierungsgrad zu erreichen durch

- Parameter (auf der rechten Seite)
- Erhöhte algebraische Anforderungen
- Entsprechende Fragestellungen
- Vertieftes Verständnis der Lösungsmenge und ihrer Interpretation

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Basisfach

Leistungsfach

Fazit

## Beispiel 1 (siehe Fundus)

Bestimmen Sie für  $r \in \mathbb{R}$  die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems:

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6$$

$$4x_1 + x_2 - 3x_3 = 4r$$

$$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 8r$$



M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Basisfach

Leistungsfach

Fazit

## Lösung zu Beispiel 1

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & 5 & 12 - 4r \\ 0 & 0 & 1 & 4r + 6 \end{pmatrix}$$

Angabe der Lösungsmenge in Abhängigkeit von  $r \in \mathbb{R}$

$$L_r = \left\{ \left( \frac{14r + 18}{5}; \frac{24r + 18}{5}; 4r + 6 \right) \right\}$$

**erhöhte algebraische  
Anforderungen, erhöhter  
Formalisierungsgrad**

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Basisfach

Leistungsfach

Fazit

## Beispiel 2

Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und den Unbekannten  $x_1, x_2, x_3$  auf, das die folgende Lösungsmenge besitzt:

$$L = \{(1 + 7r; 2 + 11r; 3 + r) \mid r \in \mathbb{R}\}$$

### Lösung

$$x_1 - 7x_3 = -20$$

$$x_2 - 11x_3 = -31$$

**Verständnis  
mathematischer Begriffe  
und Zusammenhänge**

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Basisfach

Leistungsfach

Fazit

## Beispiel 2

Alternativ:

Geben Sie die Gleichungen zweier Ebenen an, die die Schnittgerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{besitzen.}$$

Verzahnung zwischen  
formaler Lösung und  
geometrischer  
Interpretation

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Basisfach

Leistungsfach

Fazit

## Lösung zu Beispiel 2 Alternative

$P(1|2|3)$  liegt in den beiden gesuchten Ebenen E und F.  
Ein Normalenvektor von E bzw. F muss orthogonal zum

Richtungsvektor  $\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$  der Geraden sein.

Die Vektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix}$  erfüllen diese Bedingung.

Punktprobe mit P.

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Basisfach

Leistungsfach

Fazit

## Beispiel 3 (siehe Fundus)

Zwei Schülerinnen lösen dasselbe lineare Gleichungssystem. Sie erhalten die Lösungsmengen

$$L_1 = \{(2 + r; 1 + r; 3 - r) \mid r \in \mathbb{R}\}$$

bzw.  $L_2 = \{(1 - s; -s; 4 + s) \mid s \in \mathbb{R}\}$

Untersuchen Sie, ob diese Lösungsmengen identisch sind.

## Lösung zu Beispiel 3

Geometrische Interpretation der Lösungsmengen als Geraden, die parallele Richtungsvektoren und einen gemeinsamen Punkt besitzen, damit identisch sind.

Verzahnung zwischen  
formaler Lösung und  
geometrischer Interpretation

# Lineare Gleichungssysteme

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Basisfach

Leistungsfach

Fazit

- Die für das Leistungsfach genannten Inhalte bleiben auch nach dem Inkrafttreten des Bildungsplans 2016 unverändert (Abiturjahrgänge ab 2023).
- Heranziehen des Bildungsplans 2016 in Bezug auf die verwendeten Operatoren und als Interpretation des geforderten Niveaus im Leistungsfach schon jetzt möglich.

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Basisfach

Leistungsfach

Fazit

## 3.4.1 Leitidee Zahl-Variable-Operation

**Die Schülerinnen und Schüler können**

**Gauß-Algorithmus verwenden**

(11) das *Gaußverfahren* zum Lösen eines *linearen Gleichungssystems* als ein Beispiel für ein algorithmisches Verfahren erläutern

(12) das *Gaußverfahren*, auch in *Matrixschreibweise*, zum Lösen eines *linearen Gleichungssystems* durchführen

**P** 2.2 Probleme lösen 10

**P** 2.4 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen 5, 6

(13) die Lösungsmenge eines *linearen 3x3-Gleichungssystems* geometrisch interpretieren

# Lineare Gleichungssysteme

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Basisfach

Leistungsfach

Fazit

**Basisfach**

Reduktion  
der Inhalte

Möglichkeit zur  
Differenzierung →

Gaußverfahren bis zur Stufenform  
Konkrete Angabe eindeutiger Lösung  
Verständnis der Lösungsvielfalt

Gaußalgorithmus

Lösungsmenge auch im Fall  
unendlich vieler Lösungen

Geometrische Interpretation

LGS mit Parametern auf der rechten Seite

LGS mit weiteren Parametern

**Leistungs-  
fach**

erhöhter  
Formalisierungs-  
grad

Moderate neue  
Interpretation  
bisheriger Inhalte

← Möglichkeit zur  
Differenzierung



# Lineare Gleichungssysteme

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Basisfach

Leistungsfach

Fazit

**Basisfach**

Gaußverfahren bis zur Stufenform  
Konkrete Angabe eindeutiger Lösung  
Verständnis der Lösungsvielfalt

**Möglichkeit zur  
Differenzierung** →

Gaußalgorithmus  
Lösungsmenge auch im Fall  
unendlich vieler Lösungen  
Geometrische Interpretation  
LGS mit Parametern auf der rechten Seite

**Leistungs-  
fach**

LGS mit weiteren Parametern

← **Möglichkeit zur  
Differenzierung**

# Lineare Gleichungssysteme

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Basisfach

Leistungsfach

Fazit

*Aufbau Material*

Lineare Gleichungssysteme im Basis- und Leistungsfach

---

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

## Lineare Gleichungssysteme

---

- I. Grundlagen
- II. Lineare Gleichungssysteme im Basisfach
- III. Lineare Gleichungssysteme im Leistungsfach
- IV. Mögliche Differenzierungen im Leistungsfach