

M	A	T	H	E
A		z		H
T			P	T
H			G	A
E	H	T	A	M

I. Unterrichtsgang

Der im Folgenden beschriebene Unterrichtsgang zum Thema Normalverteilung berücksichtigt in besonderer Weise, dass im Basisplan „Inhalte [...] im Unterricht stärker vorstrukturiert [werden] und Argumentationen [...] häufig anschaulich oder durch heuristische Betrachtungen [erfolgen].“ Zudem soll der Unterricht im Basisfach „verstärkt realitätsbezogen“ sein.¹ Im Kopftext zur Leitidee „Daten und Zufall“ wird ausdrücklich darauf verwiesen, dass die Schülerinnen und Schüler ihr Verständnis für die Binomialverteilung weiterentwickeln sollen. So beginnt der Unterrichtsgang mit einer Wiederholung der in Klasse 10 erworbenen Kenntnisse und Fertigkeiten auf dem Gebiet der Binomialverteilung. Dies ist insbesondere auch deshalb wichtig, damit im Folgenden die Begriffe „diskret“ und „stetig“ gegeneinander abgegrenzt werden können. Diese Wiederholung wird noch erweitert um die Erkenntnis, dass im Histogramm die Trefferwahrscheinlichkeit nicht nur an der Höhe der Säulen abgelesen werden kann, sondern auch als Fläche der Säule interpretiert werden kann. Dies legt die Grundlage für den Zusammenhang zwischen den Wahrscheinlichkeiten normalverteilter Zufallsgrößen und der Fläche unter den zugehörigen Glockenkurven.

Ebenso kann dem Kopftext entnommen werden, dass es genügt, wenn die Schülerinnen und Schüler Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufallsgrößen ohne expliziten Bezug zur Analysis berechnen. Um den WTR aber nicht ausschließlich als „Blackbox“ zu nutzen, soll im Unterrichtsgang erfahren werden, dass es einen unmittelbaren Bezug zwischen der Fläche unter der Glockenkurve und den zu ermittelnden Wahrscheinlichkeiten gibt. Die Funktionsgleichungen der Glockenkurven müssen im Basisfach nicht thematisiert werden, können aber für leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler als Vertiefung angeboten werden.

Der verstärkte Realitätsbezug und der lediglich anschauliche Bezug zur Analysis bilden die Grundlage des im Folgenden skizzierten Unterrichtsgangs, der nach der Wiederholung der Binomialverteilung folgenden Weg einschlägt:

1. Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass es Zufallsgrößen gibt, die nicht nur diskrete Werte annehmen können, sondern auf einem Intervall definiert sein können.
2. Sie erfahren, dass sich viele Datensätze durch Glockenkurven beschreiben lassen und dass die zugehörige Zufallsgröße als normalverteilt bezeichnet wird.
3. Sie erkennen, dass sich die Wahrscheinlichkeiten normalverteilter Zufallsgrößen annähernd durch die Fläche unter der Glockenkurve ermitteln lassen.
4. Sie entdecken den Zusammenhang zwischen der Form der Glockenkurve und den Kenngrößen Erwartungswert und Standardabweichung und sind somit in der Lage, anhand der Kenngrößen die zugehörige Glockenkurve zu skizzieren.
5. Sie lernen bzw. wiederholen, wie Erwartungswert und Standardabweichung aus einem Datensatz ermittelt werden (mit und ohne WTR).

Der Einsatz des WTR zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten kann wahlweise ab Schritt 3 oder erst nach Schritt 5 erfolgen.

¹ Bildungsplan 2016, Mathematik – Ergänzung Basisfach Oberstufe (Stand 20.11.2018)

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H			G	A
E	H	T	A	M

Übersicht

Stunde ^(*)	Thema	didaktische Hinweise	Material
1 – 3	Binomialverteilung	Festigung der Begriffe Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Kette Wiederholung und Anwendung der Formel von Bernoulli Interpretation der Trefferwahrscheinlichkeit als Fläche der Säulen des Histogramms Einführung des Begriffs „diskret verteilte Zufallsgröße“	Planarbeit sto1_07_m01_planarbeit_wiederholung_binomialverteilung.docx Infoblatt zur Binomialverteilung sto1_07_m02_infoblatt_binomialverteilung.docx
4 – 5	Die Normalverteilung	Vom Histogramm zur Glockenkurve Einführung des Begriffs „stetig verteilte Zufallsgröße“ Wahrscheinlichkeiten anschaulich als Fläche unter der Glockenkurve interpretieren und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufallsgrößen nutzen	Arbeitsauftrag „It's Tea-Time“ sto1_07_m03_einstieg_normalverteilung.docx Übungsaufgabe „Binomial- oder normalverteilte Zufallsgröße?“ sto1_07_m04_uebung_normalverteilung.docx
6	Erwartungswert und Standardabweichung	Zusammenhang: Erwartungswert und Standardabweichung – Form und Lage der Glockenkurve mögliche Vertiefung: Funktionsgleichung $\varphi_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ in konkreten Fällen	Lückentext (grundlegendes oder erweitertes Niveau) sto1_07_m05_zusammenhang_kenngrößen_glockenkurve_grundlegend.docx sto1_07_m06_zusammenhang_kenngrößen_glockenkurve_erweitert.docx sto1_07_m07_zusammenhang_kenngrößen_glockenkurve_loesung.docx

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

7		Erwartungswert und Standardabweichung normalverteilter Zufallsgrößen ermitteln <ul style="list-style-type: none"> • mithilfe der Definition (händisch) • mithilfe des WTR 	Planarbeit sto1_07_m08_planarbeit_kenngroessen_ermitteln.docx Hilfeblatt 1 (Definition) sto1_07_m09_hilfeblatt1_kenngroessen.docx Hilfeblatt 2 (WTR) sto1_07_m10_hilfeblatt2_kenngroessen.docx
8 – 9	Untersuchung annähernd normalverteilter Zufallsgrößen	Anwendungsaufgaben	Übungsaufgaben „Hühnereier“ sto1_07_m11_uebung_huehnereier.docx „Schuhgrößen“ sto1_07_m12_uebung_schuhgroessen.docx
10 – 11	komplexere Übungen oder mögliche Vertiefungen	Sigma-Umgebung <ul style="list-style-type: none"> • entweder in Berechnungen ($P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$) andeuten • oder als Vertiefung σ-Regeln konkret formulieren 	Übungsaufgabe „Körpergröße“ sto1_07_m13_uebung_koerpergroesse.docx

(*) Die ausgewiesene Stundenzahl bezieht sich auf 45-Minuten-Einheiten. .

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				A
E	H	T	A	M

II. Hinweise zu den Unterrichtsstunden und Materialien

Stunde 1 – 3: Wiederholung der Binomialverteilung:

Im ersten Teil einer Planarbeit soll in den Vorüberlegungen die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße (Sammelfiguren in Überraschungseiern) für eine relativ kleine Kettenlänge bestimmt werden. Dadurch wird gewährleistet, dass eventuell auch ein Baumdiagramm zur Lösung des Problems herangezogen werden kann. Mithilfe des eingeführten Schulbuchs oder auch des ausgelegten Infoblattes frischen die Schülerinnen und Schüler ihre Kenntnisse auf über:

- Bernoulli-Versuch, Bernoulli-Kette, Binomialverteilung, die Formel von Bernoulli
- Singuläre (Einzel-) und kumulierte Wahrscheinlichkeiten
- Erwartungswert und Standardabweichung* binomialverteilter Zufallsgrößen

* Für die Abiturjahrgänge 2021 & 2022 kann der Begriff der Standardabweichung nicht vorausgesetzt werden und muss eventuell neu eingeführt werden.

An die Bearbeitung von Umkehraufgaben zur Formel von Bernoulli (Bestimmen von k ; n oder p) ist im Basisfach standardmäßig nicht gedacht. Solche Aufgaben können aber zur Differenzierung eingesetzt werden.

Im zweiten Teil steht das Betrachten und Interpretieren von Histogrammen sowie der Einfluss von Kettenlänge und Trefferwahrscheinlichkeit (und damit auch des Erwartungswertes) auf Lage und Form eines Histogramms im Vordergrund.

Je nach Bedarf schließen sich Übungen aus dem eingeführten Schulbuch an zu:

- Überprüfung, ob eine Binomialverteilung angenommen werden kann
- Interpretation der Formel von Bernoulli
- Berechnung von $P(X = k)$; $P(X \leq k)$; $P(X \geq k)$; $P(k_1 \leq X \leq k_2)$
- Berechnung von Erwartungswert und Standardabweichung
- Erstellen und Interpretieren von Histogrammen

Im dritten Teil soll der Übergang zum Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten mittels Flächen angebahnt werden. Hierzu werden bei einer Binomialverteilung die Trefferzahlen zu Intervallen zusammengefasst und dargelegt, dass nun die Fläche der Säule ausschlaggebend ist für die Ermittlung der Wahrscheinlichkeit über einem Intervall.

Stunde 4: Einführung der Normalverteilung:

In der ersten Phase bearbeiten die Schülerinnen und Schüler in Einzel- oder Partnerarbeit den Auftrag „It's Teatime“ und erfahren so den Übergang von einer diskreten zu einer stetigen Verteilung. Sie lernen die Glockenkurve kennen und bestimmen in Aufgabe 3 der Erarbeitungsphase erste Wahrscheinlichkeiten für vorgegebene (Zeit-) Intervalle. Diese Aufgabe ist bewusst offen gestellt, so dass dies entweder anhand der gegebenen (diskreten) Wahrscheinlichkeitsverteilung oder anhand der Fläche unter der Glockenkurve erfolgen kann. Darauf sollte im anschließenden Unterrichtsgespräch eingegangen werden. Aufgabe 4 schließlich sensibi-

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

lisiert für die Problematik, dass bei steilen Zufallsgrößen keine singulären (Einzel-) Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden können bzw. diese stets den Wert Null annehmen.

In der zweiten Phase werden zunächst die Ergebnisse vorgestellt, diskutiert und gebündelt. Abschließend werden die zentralen Begriffe der Stunde (Normalverteilung, Glockenkurve, stetig und diskret verteilte Zufallsgrößen) eingeführt und die Ergebnisse der Erarbeitungsphase werden gemeinsam im Plenum gesichert, insbesondere auch die Möglichkeit, Wahrscheinlichkeiten als Fläche unter der Glockenkurve zu veranschaulichen bzw. zu bestimmen.

Das neu Erarbeitete wird in der dritten Phase anhand einer Aufgabe eingeübt und vertieft. Den Abschluss dieser Übungsphase bildet eine aus dem gleichen Sachkontext stammende Teilaufgabe, welche die Anwendung der Binomialverteilung erfordert.

Stunde 5: erstes Anwenden der Normalverteilung und ggf. Einsatz des WTR

Nach der Einführung der Normalverteilung kann eine Übungsstunde zu folgenden Aufgabentypen erfolgen:

- Abgrenzung binomial- / normalverteilte Zufallsgrößen
- Skizzieren der Glockenkurve eines annähernd normalverteilten Datensatzes
- Näherungsweise Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten durch Abschätzen des Flächeninhalts unter einer Glockenkurve

Stunde 6: Einfluss der Kenngrößen auf die Form der Glockenkurve

Haben die Schülerinnen und Schüler in der vorangegangenen Stunde die Bedeutung der Glockenkurve zum Ermitteln von Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufallsgrößen erfahren, so sollen sie im nächsten Schritt in die Lage versetzt werden, die Glockenkurve anhand der Kenngrößen Erwartungswert und Standardabweichung zu skizzieren.

In der Erarbeitungsphase ergänzen die Schülerinnen und Schüler in Einzel- oder Partnerarbeit einen Lückentext, in dem der Einfluss der Kenngrößen einer Normalverteilung auf die Form der Glockenkurve zusammengefasst wird. Sie entdecken die Zusammenhänge anhand von sechs Paaren, bei denen in der grundlegenden Version Glockenkurven einer Reihe von Kenngrößen zugeordnet sind. Zur Differenzierung kann auch noch eine Version auf erweitertem Niveau angeboten werden. Hier sind den Kenngrößen und Glockenkurven noch zusätzlich die Funktionsgleichungen zugeordnet. In beiden Versionen werden die Schülerinnen und Schüler auch aufgefordert, insbesondere den Bereich $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ zu betrachten, so kann ggf. auf die 1-Sigma-Regel eingegangen werden.

In der Übungsphase bearbeiten die Schülerinnen und Schüler Aufgaben zum

- Ablesen von Erwartungswert und Standardabweichung aus Glockenkurven
 - Beschreiben von Auswirkungen der Variation jeweils eines Parameters (μ bzw. σ) auf die Lage/Form der Glockenkurve
 - Skizzieren von Glockenkurven bei gegebenen Kenngrößen
- Hinweis: Der y-Wert des Hochpunkts kann mithilfe des WTR ermittelt werden (CASIO: Normal-Dichte; TI: Normalpdf)

M	A	T	H	E
A		Z		H
T			P	T
H				G
E	H	T	A	M

Je nach Bedarf und individueller Schwerpunktsetzung kann bereits in dieser Stunde das Berechnen von Wahrscheinlichkeiten mithilfe des WTR erfolgen (s. hierzu: *Hinweise zum WTR-Einsatz*).

Stunde 7: Ermitteln der Kenngrößen aus Datensätzen

Im letzten Schritt geht es nun darum, die Kenngrößen Erwartungswert und Standardabweichung selbst zu ermitteln. Um hier den WTR nicht vollständig als „Blackbox“ zu verwenden, kann dies exemplarisch an einem überschaubaren Datensatz anhand der Definition erfolgen, in der Regel sollte hierfür aber der WTR als Hilfsmittel eingesetzt werden. (s. hierzu: *Hinweise zum WTR-Einsatz*).

Als Arbeitsform eignet sich die Planarbeit, da so die individuellen Vorerfahrungen und Fertigkeiten der Schülerinnen und Schüler in Bezug auf Algebra und Umgang mit dem WTR berücksichtigt werden können und ein Arbeiten im eigenen Tempo möglich ist.

Stunde 8 – 9: Untersuchung annähernd normalverteilter Zufallsgrößen

Die Schülerinnen und Schüler verfügen nun über sämtliche Grundlagen, um anwendungsbezogene Problemstellungen im Kontext normalverteilter Zufallsgrößen zu lösen. Spätestens zu Beginn dieser abschließenden Übungsphase sollte das Berechnen von Wahrscheinlichkeiten auch mithilfe des WTR erfolgen (s. hierzu: *Hinweise zum WTR-Einsatz*).

Bei der Übungsaufgabe „Schuhgrößen“ bietet sich auch eine Erhebung im eigenen Kurs an, um so z.B. zu erheben, in welchem Intervall um den Erwartungswert die individuellen Werte der Schülerinnen und Schüler liegen.

Es kann auch der Erwartungswert (Mittelwert) und die Standardabweichung der kleinen Stichprobe „unser Kurs“ ermittelt werden und mit den gegebenen Werten verglichen werden.

Stunde 10 – 11: Komplexere Übungen oder mögliche Vertiefungen

Komplexere Übungen stellen z.B. anwendungsbezogene Problemstellungen dar, für deren Lösung sowohl die Binomial- als auch die Normalverteilung zur Modellierung herangezogen werden.

Bei der Übungsaufgabe „Körpergrößen“ bietet sich wieder eine Erhebung im eigenen Kurs an, allerdings sollte im Falle auffällig großer oder auffällig kleiner Schüler oder Schülerinnen sensibel vorgegangen werden.

Als mögliche Vertiefung bietet sich die Herleitung und Anwendung der Sigma-Regeln an.