Vektorielle Beweise mit gestuften Hilfen (1)

Beweisen Sie möglichst viele der folgenden Zusammenhänge. Dabei stehen Ihnen folgende Hilfen zur Verfügung:

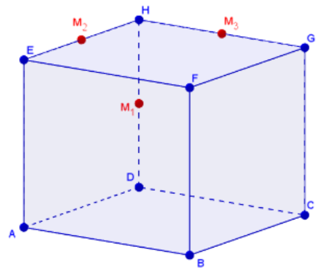
<u>Hilfekarten</u>:
Die Hilfekarten helfen Ihnen Schritt für Schritt beim Beweis weiter. Sie können – je nach Bedarf – nur eine, mehrere oder alle Hilfekarten benutzen.

<u>Lückentext</u>
Der Beweis ist mit einigen Lücken versehen, die von Ihnen ausgefüllt werden sollen.

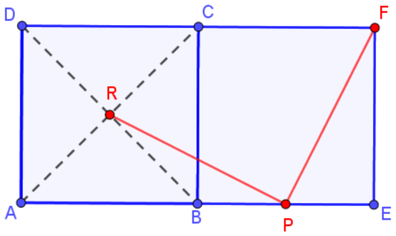
<u>Beweispuzzle</u>
Alle Beweisschritte sind auf Karten notiert, die Sie in Ihrem Heft in die richtige Reihenfolge bringen sollen. Hinzufügen müssen Sie die Teilüberschriften „Einführungen von Vektoren und Bezeichnungen“, „Voraussetzung“, „Behauptung“ und „Beweis“.

<u>Lösung</u>
Kommen Sie an einer Stelle nicht weiter, holen Sie sich bei Ihren Mitschülern oder beim Lehrer Hilfe, oder betrachten Sie die Lösung.

<u>Aufgabe 1: Kantenmitten im Würfel</u>



In einem Würfel sind M_1, M_2 und M_3 jeweils Kantenmitten im Würfel ABCDEFGH (siehe Abb.).
Beweisen Sie, dass die Strecken $\overline{BM_1}$ und $\overline{M_2M_3}$ zueinander orthogonal sind.



<u>Aufgabe 2: Strecken im Quadrat</u>

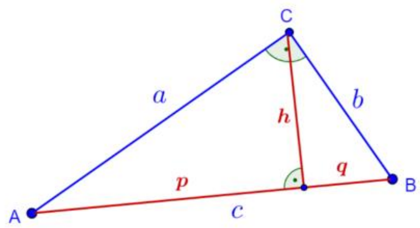
Gegeben sind zwei Quadrate mit der gemeinsamen Seite BC. Der Punkt P ist der Mittelpunkt der Quadratseite BE.
Beweisen Sie, dass die Strecken $\overline{RP}$ und $\overline{PF}$ zueinander orthogonal sind.

<u>Aufgabe 3: Diagonalen im Parallelogramm</u>

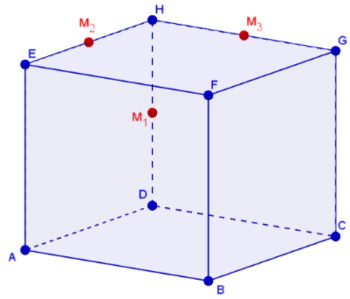
Beweisen Sie mit einem vektoriellen Ansatz:
Halbieren sich in einem Viereck die Diagonalen, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

<u>Aufgabe 4: Höhensatz des Euklid</u>

Beweisen Sie mit einem vektoriellen Ansatz den Höhensatz des Euklid:
Teilt in einem rechtwinkligen Dreieck die zur Hypotenuse gehörende Höhe h die Hypotenuse in zwei Abschnitte p und q, so gilt: $h^2 = p \cdot q$



Aufgabe 1: Kantenmitten im Würfel



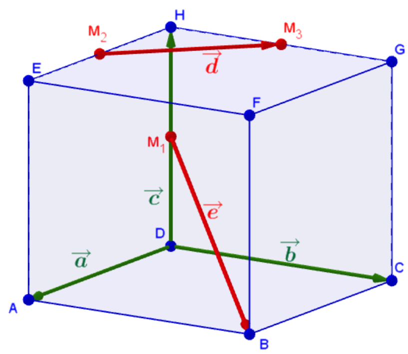
In einem Würfel sind M_1, M_2 und M_3 jeweils Kantenmitten im Würfel ABCDEFGH (siehe Abb.).
Beweisen Sie, dass die Strecken $\overline{M_1B}$ und $\overline{M_2M_3}$ zueinander orthogonal sind.

Lösung

(1) Skizze und Einführung von Vektoren und Bezeichnungen

$\vec{a} = \overrightarrow{DA}$ $\quad \vec{b} = \overrightarrow{DC}$ $\quad \vec{c} = \overrightarrow{DH}$ $\quad \vec{d} = \overrightarrow{M_2M_3}$ $\quad \vec{e} = \overrightarrow{M_1B}$

(2) Voraussetzung



ABCDEFGH ist ein Würfel, d.h. $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$
und $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$, $\vec{a} \perp \vec{c}$
M_1, M_2 und M_3 sind Kantenmitten, d.h. es gilt:
$\overrightarrow{DM_1} = \overrightarrow{M_1H} = \frac{1}{2}\vec{c}$ $\qquad \overrightarrow{HM_2} = \overrightarrow{M_2E} = \frac{1}{2}\vec{a}$
$\overrightarrow{HM_3} = \overrightarrow{M_3G} = \frac{1}{2}\vec{b}$

(3) Behauptung

$\vec{d} \perp \vec{e}$

(4) Beweis

$$\vec{d} \cdot \vec{e} = \left(-\tfrac{1}{2}\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b} - \tfrac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}\underbrace{\vec{a} \cdot \vec{c}}_{0} + \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{b} - \frac{1}{4}\underbrace{\vec{b} \cdot \vec{c}}_{0}$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= -\frac{1}{2}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{2}\left|\vec{b}\right|^2$$

$$= 0$$

Demnach gilt: $\vec{d} \perp \vec{e}$

Anmerkung:
Für die Orthogonalität ist entscheidend, dass $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right|$ gilt. Der Betrag von $\vec{c}$ spielt hingegen keine Rolle. Somit gilt die Behauptung auch für Quader mit quadratischer Grundfläche.

Aufgabe 1: Gestufte Hilfekarten

Hilfe 1	***Hilfe 2***	***Hilfe 3***
Führen Sie die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DH}$, $\vec{d} = \overrightarrow{M_2M_3}$ und $\vec{e} = \overrightarrow{M_1B}$ ein. Formulieren Sie damit die Voraussetzung und Behauptung.	Drücken Sie die Vektoren $\vec{d}$ und $\vec{e}$ mithilfe von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus und zeigen Sie ihre Orthogonalität.	Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann zueinander orthogonal, wenn gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Aufgabe 1: Beweispuzzle

Bringen Sie die Karten in die richtige Reihenfolge und notieren Sie - nachdem Sie eine Skizze erstellt und Vektoren eingeführt haben - Voraussetzung, Behauptung und den Beweis im Heft.

M_1, M_2 und M_3 sind Kantenmitten, d.h. es gilt:

$$\vec{a} = \overrightarrow{DA} \qquad \vec{b} = \overrightarrow{DC} \qquad \vec{c} = \overrightarrow{DH}$$
$$\vec{d} = \overrightarrow{M_2M_3} \qquad \vec{e} = \overrightarrow{M_1B}$$

$$= -\tfrac{1}{2}|\vec{a}|^2 + \tfrac{1}{2}|\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$\overrightarrow{DM_1} = \overrightarrow{M_1H} = \tfrac{1}{2}\vec{c} \qquad \overrightarrow{HM_2} = \overrightarrow{M_2E} = \tfrac{1}{2}\vec{a} \qquad \overrightarrow{HM_3} = \overrightarrow{M_3G} = \tfrac{1}{2}\vec{b}$$

$$\vec{d} \perp \vec{e}$$

und $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$, $\vec{a} \perp \vec{c}$

$$= 0$$

Demnach gilt: $\vec{d} \perp \vec{e}$

$$= -\frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}\underbrace{\vec{a} \cdot \vec{c}}_{0} + \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{b} - \frac{1}{4}\underbrace{\vec{b} \cdot \vec{c}}_{0}$$

$$\vec{d} \cdot \vec{e}$$

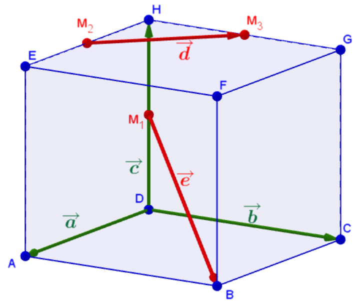
ABCDEFGH ist ein Würfel, d.h.

$$\left(-\tfrac{1}{2}\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b} - \tfrac{1}{2}\vec{c}\right)$$

Aufgabe 1: Lückentext

Führen Sie den Beweis, indem Sie die Lücken ausfüllen.

Skizze und Einführung von Vektoren und Bezeichnungen



$\vec{a} =$ ____ $\vec{b} =$ ____ $\vec{c} =$ ____

$\vec{d} =$ ____ $\vec{e} =$ ____

Voraussetzung

ABCDEFGH ist ein Würfel, d.h. $|\vec{a}| =$ ____ $=$ _____

und $\vec{a} \perp$ ___ , ______ , _______

M_1, M_2 und M_3 sind Kantenmitten, d.h. es gilt:

$\overrightarrow{DM_1} =$ _____ $=$ _____ $\overrightarrow{HM_2} =$ _____ $=$ _____ $\overrightarrow{HM_3} =$ _____ $=$ _____

Behauptung

____

Beweis

$\vec{d} \cdot \vec{e} =$ (_____ + _____) $\cdot$ (_____ + _____ + _____)

= ___________________________

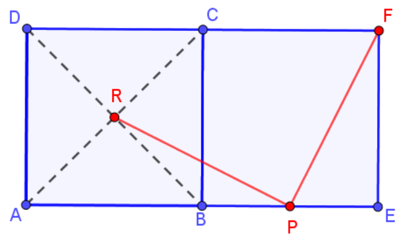
= _______________

= _______________

$= 0$

Demnach gilt: ________

Aufgabe 2: Strecken im Quadrat



Gegeben sind zwei Quadrate mit der gemeinsamen Seite BC. Der Punkt P ist der Mittelpunkt der Quadratseite BE.
Beweisen Sie, dass die Strecken $\overline{RP}$ und $\overline{PF}$ zueinander orthogonal sind.

Lösung

(1) Skizze und Einführung von Vektoren und Bezeichnungen

Zunächst legen wir ein kartesisches Koordinatensystem fest, durch: $A(0|0)$ und $B(2a|0)$

(2) Voraussetzung

$ABCD$ und $BEFC$ sind Quadrate, d.h. es gilt:
$C(2a|2a);\ D(0|2a);\ E(4a|0);\ F(4a|2a)$

R ist Diagonalenschnittpunkt im Quadrat $ABCD$, d.h. es gilt: $R(a|a)$

P ist Mittelpunkt der Strecke $\overline{BE}$, d.h. es gilt: $P(3a|0)$

(3) Behauptung

$\overrightarrow{RP} \perp \overrightarrow{PF}$

(4) Beweis

$$\overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} 3a - a \\ 0 - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ -a \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 4a - 3a \\ 2a - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{PF} &= \begin{pmatrix} 2a \\ -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix} \\ &= 2a^2 + (-2a^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Demnach gilt: $\overrightarrow{RP} \perp \overrightarrow{PF}$

Aufgabe 2: Gestufte Hilfekarten

Hilfe 1	***Hilfe 2***
Führen Sie ein Koordinatensystem ein. Wählen Sie als Ursprung den Punkt A und als Seitenlänge der Quadrate 2 LE.	Formulieren Sie die Voraussetzung. Geben Sie die Koordinaten der relevanten Punkte an. Formulieren Sie dann die Behauptung.
Hilfe 3	***Hilfe 4***
Berechnen Sie die Koordinaten der Vektoren $\overrightarrow{RP}$ und $\overrightarrow{PF}$ und zeigen Sie, so ihre Orthogonalität.	Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann zueinander orthogonal, wenn gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Aufgabe 2: Beweispuzzle

Bringen Sie die Karten in die richtige Reihenfolge und notieren Sie - nachdem Sie eine Skizze erstellt und Vektoren eingeführt haben - Voraussetzung, Behauptung und den Beweis im Heft.

P ist Mittelpunkt der Strecke $\overline{BE}$, d.h. es gilt: $P(3|0)$

$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$ABCD$ und $BEFC$ sind Quadrate, d.h. es gilt:

Zunächst legen wir ein kartesisches Koordinatensystem fest, durch: $A(0|0)$ und $B(2|0)$ **1.**

$\overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

R ist Diagonalenschnittpunkt im Quadrat $ABCD$, d.h. es gilt: $R(1|1)$

$\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{RP} \perp \overrightarrow{PF}$

$= 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 0$

Demnach gilt: $\overrightarrow{RP} \perp \overrightarrow{PF}$

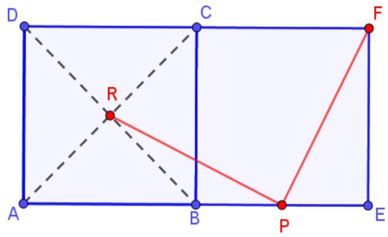
$C(2|2)$; $D(0|2)$; $E(4|0)$; $F(4|2)$

Aufgabe 2: Lückentext

Führen Sie den Beweis, indem Sie die Lücken ausfüllen.

Skizze und Einführung von Vektoren und Bezeichnungen

Zunächst legen wir ein kartesisches Koordinatensystem fest, durch: $A(0|0)$ und $B(2|\_\_)$.



Voraussetzung:

$ABCD$ und $BEFC$ sind ____________________, d.h. es gilt:

$C(\_\_|\_\_)$; $D(\_\_|\_\_)$; $E(\_\_|\_\_)$; $F(\_\_|\_\_)$

R ist Diagonalenschnittpunkt im Quadrat $ABCD$, d.h. es gilt: $R(\_\_|\_\_)$

P ist ________________ der Strecke $\overline{BE}$, d.h. es gilt: $P(\_\_|\_\_)$

Behauptung:

____

Beweis:

$\overrightarrow{RP} =$ _________ $\overrightarrow{PF} =$ ____________

$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{PF} =$ ___________ $=$ ____________ $=$ ___ Demnach gilt: $\overrightarrow{RP} \perp \overrightarrow{PF}$

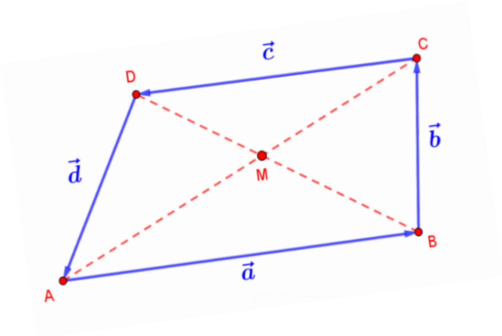
Aufgabe 3: Diagonalen im Parallelogramm

Beweisen Sie mit einem vektoriellen Ansatz:
Halbieren sich in einem Viereck die Diagonalen, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Lösung:

(1) Skizze und Einführung von Vektoren und Bezeichnungen:

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ $\quad \vec{b} = \overrightarrow{BC}$ $\quad \vec{c} = \overrightarrow{CD}$ $\quad \vec{d} = \overrightarrow{DA}$



(2) Voraussetzung:

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ $\quad \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

(3) Behauptung:

$\vec{b} = -\vec{d}$

(4) Beweis:

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ (geschlossene Vektorkette)

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

$\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{a}) - \vec{a} = \vec{0}$

$\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d} + \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$

$\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d} = \vec{0}$

$\vec{b} = -\vec{d}$

Da das Viereck $ABCD$ zwei gleich lange zueinander parallele Seiten hat, ist es ein Parallelogramm.

Aufgabe 3: Gestufte Hilfekarten

Hilfe 1

Führen Sie die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ und $\vec{d} = \overrightarrow{DA}$ ein und formulieren Sie die Voraussetzung und die Behauptung.

Hilfe 2

Führen Sie die geschlossene Vektorkette $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ ein.

Hilfe 3

Drücken Sie die Vektoren der geschlossenen Vektorkette durch die zuvor eingeführten Vektoren aus und vereinfachen Sie die Gleichung.

Aufgabe 3: Beweispuzzle

Bringen Sie die Karten in die richtige Reihenfolge und notieren Sie - nachdem Sie eine Skizze erstellt und Vektoren eingeführt haben - Voraussetzung, Behauptung und den Beweis im Heft.

$\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d} + \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$

$\vec{b} = -\vec{d}$

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ $\quad\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ $\quad\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ $\quad\vec{d} = \overrightarrow{DA}$

$\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d} = \vec{0}$

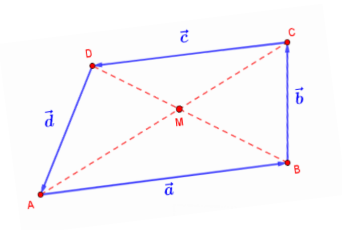
$\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{a}) - \vec{a} = \vec{0}$

Da das Viereck $ABCD$ zwei gleich lange zueinander parallele Seiten hat, ist es ein Parallelogramm.

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ (geschlossene Vektorkette)

$\vec{b} = -\vec{d}$

Einführung einer Skizze mit Bezeichnungen und Vektoren



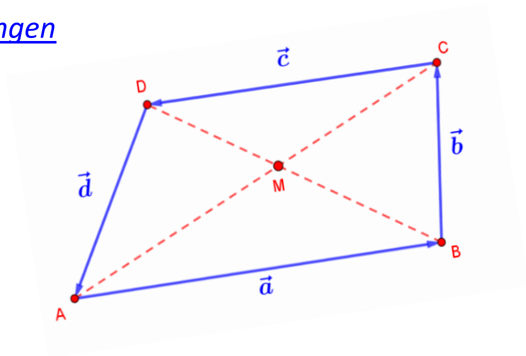
$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ $\quad\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

Aufgabe 3: Lückentext

Führen Sie den Beweis, indem Sie die Lücken ausfüllen.

Skizze und Einführung von Vektoren und Bezeichnungen



$\vec{a} =$ _____ $\quad \vec{b} =$ _____

$\vec{c} =$ _____ $\quad \vec{d} =$ _____

Voraussetzung:

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}$ _____ $\quad \overrightarrow{BM} =$ _____

Behauptung:

$\vec{b} =$ _____

Beweis:

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} =$ _____ (geschlossene Vektorkette)

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ + ___ + _____ $= \vec{0}$

________ $+ \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{a}) -$ ______ $= \vec{0}$

$\frac{1}{2}$ ___ $+ \frac{1}{2}$ _____ $+ \frac{1}{2}$ _____ $+ \frac{1}{2}$ _____ $-$ ____ $= \vec{0}$

______ $= \vec{0}$

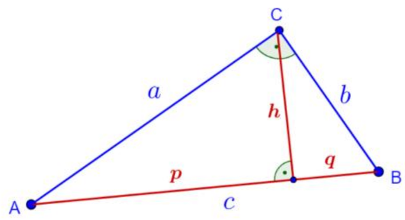
$\vec{b} = -\vec{d}$

Da das Viereck $ABCD$ zwei gleich lange zueinander ________________________ hat, ist es ein _____________________.

Aufgabe 4: Höhensatz des Euklid

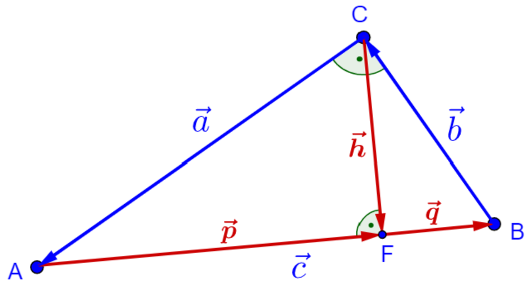
Beweisen Sie mit einem vektoriellen Ansatz den Höhensatz des Euklid:
Teilt in einem rechtwinkligen Dreieck die zur Hypotenuse gehörende Höhe h die Hypotenuse in zwei Abschnitte p und q, so gilt:

$$h^2 = p \cdot q$$



Lösung

(1) Skizze Einführung von Vektoren und Bezeichnungen



Wir bezeichnen den Fußpunkt des Lots von C auf die Hypotenuse c mit F.

$\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ $\quad$ $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ $\quad$ $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$

$\vec{p} = \overrightarrow{AF}$ $\quad$ $\vec{q} = \overrightarrow{FB}$ $\quad$ $\vec{h} = \overrightarrow{CF}$

(2) Voraussetzung

ABC ist ein bei C rechtwinkliges Dreieck: $\vec{a} \perp \vec{b}$ und $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$

F ist der Höhenfußpunkt: $\vec{h} \perp \vec{c}$ $\quad$ $\vec{h} \perp \vec{p}$ $\quad$ $\vec{h} \perp \vec{q}$

(3) Behauptung

$$|\vec{h}|^2 = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}|$$

(4) Beweis

Nach Pythagoras gilt: $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$ bzw. $\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = \vec{c}^2$

Mit $\vec{a} = \vec{h} - \vec{p}$, $\vec{b} = -\vec{q} - \vec{h}$ und $\vec{c} = \vec{p} + \vec{q}$ erhält man:

$(\vec{h} - \vec{p})^2 + (-\vec{q} - \vec{h})^2 = (\vec{p} + \vec{q})^2$ bzw.

$$\vec{h}^2 - \underbrace{2 \cdot \vec{h} \cdot \vec{p}}_{0,\ da\ \vec{h} \perp \vec{p}} + \vec{p}^2 + \vec{q}^2 + \underbrace{2 \cdot \vec{q} \cdot \vec{h}}_{0,\ da\ \vec{h} \perp \vec{q}} + \vec{h}^2 = \vec{p}^2 + 2 \cdot \vec{p} \cdot \vec{q} + \vec{q}^2 \quad | -(\vec{p}^2 + \vec{q}^2)$$

$$\vec{h}^2 + \vec{h}^2 = 2 \cdot \vec{p} \cdot \vec{q} \quad |:2$$

$$\vec{h}^2 = \vec{p} \cdot \vec{q}$$

$$|\vec{h}|^2 = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \qquad \text{da } \vec{p} \parallel \vec{q}$$

Aufgabe 4: Gestufte Hilfekarten

Hilfe 1

Bezeichnen Sie den Fußpunkt des Lots von C auf die Hypotenuse c mit F und führen Sie sechs verschiedene Vektoren ein.

Hilfe 2

Formulieren Sie mit den eingeführten Vektoren die Voraussetzung und die Behauptung.

Hilfe 3

Notieren Sie den Satz des Pythagoras mithilfe der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, ohne Beträge zu verwenden.

Hilfe 4

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\varphi)$$

Demnach gilt:

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Hilfe 5

Ersetzen Sie die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ durch die Vektoren $\vec{p}$, $\vec{q}$ und $\vec{h}$ und formen Sie ihre Gleichung so lange um, bis Sie die Behauptung erhalten.

Hilfe 6

Die binomischen Formeln gelten auch für Vektoren:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{a}^2$$

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{a}$$

$$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$$

Aufgabe 4: Beweispuzzle

Bringen Sie die Karten in die richtige Reihenfolge und notieren Sie - nachdem Sie eine Skizze erstellt und Vektoren eingeführt haben - Voraussetzung, Behauptung und den Beweis im Heft.

$\vec{a} = \overrightarrow{CA} \qquad \vec{b} = \overrightarrow{BC} \qquad \vec{c} = \overrightarrow{AB}$

F ist der Höhenfußpunkt: $\vec{h} \perp \vec{c} \qquad \vec{h} \perp \vec{p} \qquad \vec{h} \perp \vec{q}$

$(\vec{h} - \vec{p})^2 + (-\vec{q} - \vec{h})^2 = (\vec{p} + \vec{q})^2$ bzw.

bzw. $\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = \vec{c}^2$

ABC ist ein bei C rechtwinkliges Dreieck:

$\vec{h}^2 + \vec{h}^2 = 2 \cdot \vec{p} \cdot \vec{q} \quad |:2$

Wir bezeichnen den Fußpunkt des Lots von C auf die Hypotenuse c mit F

$|\vec{h}|^2 = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}|$

$\vec{h}^2 = \vec{p} \cdot \vec{q}$

$\vec{h}^2 - \underbrace{2 \cdot \vec{h} \cdot \vec{p}}_{0,\ da\ \vec{h} \perp \vec{p}} + \vec{p}^2 + \vec{q}^2 + \underbrace{2 \cdot \vec{q} \cdot \vec{h}}_{0,\ da\ \vec{h} \perp \vec{q}} + \vec{h}^2 = \vec{p}^2 + 2 \cdot \vec{p} \cdot \vec{q} + \vec{q}^2 \quad | - (\vec{p}^2 + \vec{q}^2)$

Mit $\vec{a} = \vec{h} - \vec{p}$, $\vec{b} = -\vec{q} - \vec{h}$ und $\vec{c} = \vec{p} + \vec{q}$ erhält man:

$|\vec{h}|^2 = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \qquad$ da $\vec{p} \parallel \vec{q}$

Nach Pythagoras gilt: $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$

$\vec{p} = \overrightarrow{AF} \qquad \vec{q} = \overrightarrow{FB} \qquad \vec{h} = \overrightarrow{CF}$

$\vec{a} \perp \vec{b}$ und $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$

Aufgabe 4: Lückentext

Führen Sie den Beweis, indem Sie die Lücken ausfüllen.

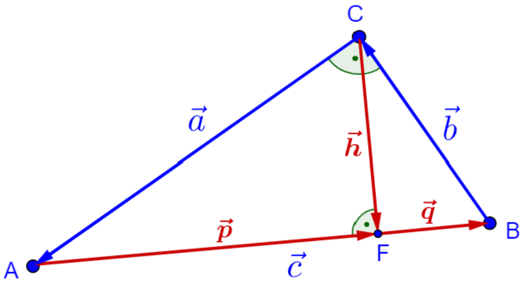
Skizze und Einführung von Vektoren und Bezeichnungen

Wir bezeichnen den Fußpunkt des Lots

von ___ auf die Hypotenuse c mit ____.

$\vec{a} = \_\_\_\_$ $\quad \vec{b} = \_\_\_\_$ $\quad \vec{c} = \_\_\_\_$

$\vec{p} = \_\_\_\_$ $\quad \vec{q} = \_\_\_\_$ $\quad \vec{h} = \_\_\_\_$



Voraussetzung

ABC ist ein bei C rechtwinkliges Dreieck: $\_\_ \perp \_\_$ und $|\vec{a}|^2 + \_\_\_ = \_\_\_$

F ist Höhenfußpunkt: $\_\_ \perp \_\_ \quad \_\_ \perp \_\_ \quad \_\_ \perp \_\_$

Behauptung

$|\vec{h}|^2 = \_\_ \cdot \_\_$

Beweis

Nach Pythagoras gilt: $|\vec{a}|^2 + \_\_ = \_\_$ bzw. $\_\_ + \vec{b}^2 = \_\_$

Mit $\vec{a} = \vec{h} - \vec{p}$, $\vec{b} = \_\_\_\_\_\_$ und $\vec{c} = \_\_ + \vec{q}$ erhält man:

$(\_\_\_\_\_\_)^2 + (\_\_\_\_\_\_)^2 = (\_\_\_\_\_\_)^2$ bzw.

$\vec{h}^2 - \underbrace{2 \cdot \vec{h} \cdot \vec{p}}_{\_\_, da \_\_\_} + \vec{p}^2 + \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \quad | -(\vec{p}^2 + \vec{q}^2)$

$\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \quad |:2$

$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

$|\vec{h}|^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_$, da $\vec{p} \_\_\_ \vec{q}$

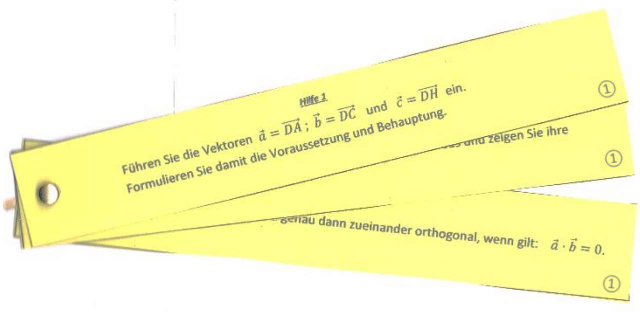
Anleitung zur Erstellung der gestuften Hilfekarten

Auf den folgenden Seiten finden Sie gestufte Hilfekarten in zwei Varianten: Variante 1 liefert ein schöneres Ergebnis, Variante 2 schneller ist schneller zu erstellen.

Variante 1: Beweisfächer

Nach Aufgaben sortierte Hilfekarten.

Die Hilfekarten ausdrucken, auf verschiedenfarbiges Papier kopieren, laminieren, ausschneiden, lochen und mit einer Musterbeutelklammer zusammenstecken.



Variante 2: Schneidemaschine

Drucken Sie alle Seiten einmal aus und legen Sie die ausgedruckten Seiten übereinander.

Schneiden Sie mit einer Schneidemaschine entlang der markierenten Linien und legen Sie die erhaltenen Papierstapel übereinander.

Nun liegen alle Hilfekarten richtig:

Oben Hilfekarte 1-3 von Aufgabe 5, dann Hilfekarte 1-3 von Aufgabe 6 usw.

Aufgabe 1: Gestufte Hilfekarten (Variante 1: Beweisfächer)

Hilfe 1

Führen Sie die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$; $\vec{b} = \overrightarrow{DC}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{DH}$ ein.
Formulieren Sie damit die Voraussetzung und Behauptung.

1

Hilfe 2

Drücken Sie die Vektoren $\vec{d}$ und $\vec{e}$ mithilfe von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus und zeigen Sie ihre Orthogonalität.

1

Hilfe 3

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann zueinander orthogonal, wenn gilt:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

1

Hilfe 1

Führen Sie die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$; $\vec{b} = \overrightarrow{DC}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{DH}$ ein.
Formulieren Sie damit die Voraussetzung und Behauptung.

1

Hilfe 2

Drücken Sie die Vektoren $\vec{d}$ und $\vec{e}$ mithilfe von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus und zeigen Sie ihre Orthogonalität.

1

Hilfe 3

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann zueinander orthogonal, wenn gilt:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

1

Hilfe 1

Führen Sie die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$; $\vec{b} = \overrightarrow{DC}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{DH}$ ein.
Formulieren Sie damit die Voraussetzung und Behauptung.

1

Hilfe 2

Drücken Sie die Vektoren $\vec{d}$ und $\vec{e}$ mithilfe von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus und zeigen Sie ihre Orthogonalität.

1

Hilfe 3

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann zueinander orthogonal, wenn gilt:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

1

Aufgabe 2: Gestufte Hilfekarten (Variante 1: Beweisfächer)

Hilfe 1

Führen Sie ein Koordinatensystem ein.
Wählen Sie als Ursprung den Punkt A und als Seitenlänge der Quadrate 2 LE.

2

Hilfe 2

Formulieren Sie die Voraussetzung.
Geben Sie die Koordinaten der relevanten Punkte an.
Formulieren Sie dann die Behauptung.

2

Hilfe 3

Berechnen Sie die Koordinaten der Vektoren $\overrightarrow{RP}$ und $\overrightarrow{PF}$ und zeigen Sie so ihre Orthogonalität.

2

Hilfe 4

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann zueinander orthogonal, wenn gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

2

Hilfe 1

Führen Sie ein Koordinatensystem ein.
Wählen Sie als Ursprung den Punkt A und als Seitenlänge der Quadrate 2 LE.

2

Hilfe 2

Formulieren Sie die Voraussetzung.
Geben Sie die Koordinaten der relevanten Punkte an.
Formulieren Sie dann die Behauptung.

2

Hilfe 3

Berechnen Sie die Koordinaten der Vektoren $\overrightarrow{RP}$ und $\overrightarrow{PF}$ und zeigen Sie so ihre Orthogonalität.

2

Hilfe 4

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann zueinander orthogonal, wenn gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

2

Aufgabe 3: Gestufte Hilfekarten (Variante 1: Beweisfächer)

Hilfe 1

Führen Sie die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ und $\vec{d} = \overrightarrow{DA}$ ein und formulieren die Voraussetzung und die Behauptung.

③

Hilfe 2

Führen Sie die geschlossene Vektorkette $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ ein.

③

Hilfe 3

Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{AM}$ und $\overrightarrow{MB}$ der geschlossenen Vektorkette durch die zuvor eingeführten Vektoren aus und vereinfachen Sie die Gleichung.

③

Hilfe 1

Führen Sie die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ und $\vec{d} = \overrightarrow{DA}$ ein und formulieren die Voraussetzung und die Behauptung.

③

Hilfe 2

Führen Sie die geschlossene Vektorkette $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ ein.

③

Hilfe 3

Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{AM}$ und $\overrightarrow{MB}$ der geschlossenen Vektorkette durch die zuvor eingeführten Vektoren aus und vereinfachen Sie die Gleichung.

③

Hilfe 1

Führen Sie die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ und $\vec{d} = \overrightarrow{DA}$ ein und formulieren die Voraussetzung und die Behauptung.

③

Hilfe 2

Führen Sie die geschlossene Vektorkette $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ ein.

③

Hilfe 3

Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{AM}$ und $\overrightarrow{MB}$ der geschlossenen Vektorkette durch die zuvor eingeführten Vektoren aus und vereinfachen Sie die Gleichung.

③

Aufgabe 4: Gestufte Hilfekarten (Variante 1: Beweisfächer)

Hilfe 1

Bezeichnen Sie den Fußpunkt des Lots von C auf die Hypotenuse c mit F und führen Sie sechs verschiedene Vektoren ein.

4

Hilfe 2

Formulieren Sie mit den eingeführten Vektoren die Voraussetzung und die Behauptung.

4

Hilfe 3

Notieren Sie den Satz des Pythagoras mithilfe der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, ohne Beträge zu verwenden.

4

Hilfe 4

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\varphi)$$

Demnach gilt: $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$ sowie $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

4

Hilfe 5

Ersetzen Sie die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ durch die Vektoren $\vec{p}$, $\vec{q}$ und $\vec{h}$ und formen Sie ihre Gleichung so lange um, bis Sie die Behauptung erhalten.

4

Hilfe 6

Die binomischen Formeln gelten auch für Vektoren: $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{a}^2$

$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{a}$ $\qquad (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$

4

Variante 2

Hilfe 1

Führen Sie die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$; $\vec{b} = \overrightarrow{DC}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{DH}$ ein.
Formulieren Sie damit die Voraussetzung und Behauptung.

①

✂ - ✂

Hilfe 2

Formulieren Sie die Voraussetzung. Geben Sie die Koordinaten der relevanten Punkte an. Formulieren Sie dann die Behauptung.

②

✂ - ✂

Hilfe 2

Führen Sie die geschlossene Vektorkette $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ ein.

③

✂ - ✂

Hilfe 3

Notieren Sie den Satz des Pythagoras mithilfe der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, ohne Beträge zu verwenden.

④

Hilfe 2

Drücken Sie die Vektoren $\vec{d}$ und $\vec{e}$ mithilfe von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus und zeigen Sie ihre Orthogonalität.

1

✂ - ✂

Hilfe 3

Berechnen Sie die Koordinaten der Vektoren $\overrightarrow{RP}$ und $\overrightarrow{PF}$ und zeigen Sie so ihre Orthogonalität.

2

✂ - ✂

Hilfe 3

Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{AM}$ und $\overrightarrow{MB}$ der geschlossenen Vektorkette durch die zuvor eingeführten Vektoren aus und vereinfachen Sie die Gleichung.

3

✂ - ✂

Hilfe 4

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\varphi)$

Demnach gilt: $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$ sowie $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

4

Hilfe 3

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann zueinander orthogonal, wenn gilt:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

①

✂ - ✂

Hilfe 4

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann zueinander orthogonal, wenn gilt:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

②

✂ - ✂

Hilfe 1

Bezeichnen Sie den Fußpunkt des Lots von C auf die Hypotenuse c mit F und führen Sie sechs verschiedene Vektoren ein.

④

✂ - ✂

Hilfe 5

Ersetzen Sie die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ durch die Vektoren $\vec{p}$, $\vec{q}$ und $\vec{h}$ und formen Sie ihre Gleichung so lange um, bis Sie die Behauptung erhalten.

④

<u>Hilfe 1</u>

Führen Sie ein Koordinatensystem ein.
Wählen Sie als Ursprung den Punkt A und als Seitenlänge der Quadrate 2 LE.

②

<u>Hilfe 1</u>

Führen Sie die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ und $\vec{d} = \overrightarrow{DA}$ ein und formulieren Sie die Voraussetzung und die Behauptung.

③

<u>Hilfe 2</u>

Formulieren Sie mit den eingeführten Vektoren die Voraussetzung und die Behauptung.

④

<u>Hilfe 6</u>

Die binomischen Formeln gelten auch für Vektoren: $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{a}^2$

$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{a}$ $\qquad$ $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$

④