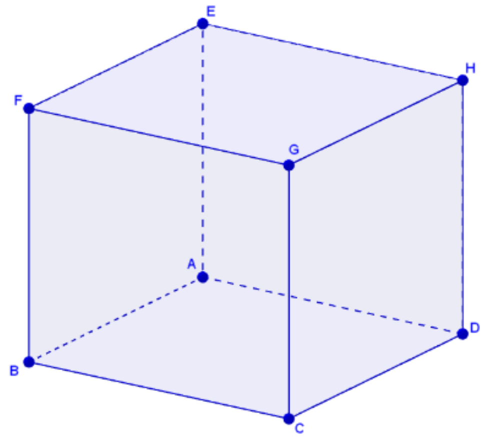
Vektorielle Beweise mit und ohne Koordinatensystem



Beweisen Sie mit einem vektoriellen Ansatz:
In einem Würfel ABCDEFGH sind die Raumdiagonalen $\overline{AG}$ und $\overline{DF}$ nicht zueinander orthogonal (s. Abb.).

Lösung (ohne Koordinatensystem):

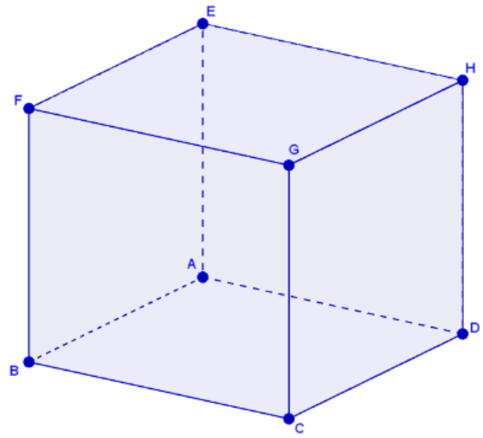
(1) Skizze und Einführung von Vektoren und Bezeichnungen:

(2) Voraussetzung:

(3) Behauptung:

(4) Beweis:

Vektorielle Beweise mit und ohne Koordinatensystem



Beweisen Sie mit einem vektoriellen Ansatz:
In einem Würfel ABCDEFGH sind die Raumdiagonalen $\overline{AG}$ und $\overline{DF}$ nicht zueinander orthogonal (s. Abb.).

Lösung (mit Koordinatensystem):

(1) Skizze und Einführung von Vektoren und Bezeichnungen:

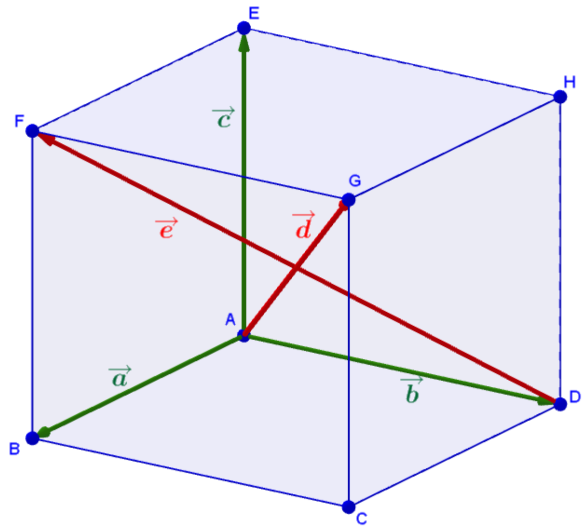
(2) Voraussetzung:

(3) Behauptung:

(4) Beweis:

Lösungen: Vektorielle Beweise mit und ohne Koordinatensystem

Beweisen Sie mit einem vektoriellen Ansatz:
In einem Würfel ABCDEFGH sind die Raumdiagonalen $\overline{AG}$ und $\overline{DF}$ nicht zueinander orthogonal (s. Abb.).



Lösung (ohne Koordinatensystem):

(1) Skizze und Einführung von Vektoren und Bezeichnungen:

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ $\quad \vec{b} = \overrightarrow{AD}$ $\quad \vec{c} = \overrightarrow{AE}$ $\quad \vec{d} = \overrightarrow{AG}$ $\quad \vec{e} = \overrightarrow{DF}$

(2) Voraussetzung:

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$; $\quad |\vec{a}| > 0$

$\vec{a} \perp \vec{b}$; $\quad \vec{a} \perp \vec{c}$; $\quad \vec{b} \perp \vec{c}$

(3) Behauptung:

$\vec{d} \cdot \vec{e} \neq 0$

(4) Beweis:

$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ $\qquad \vec{e} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

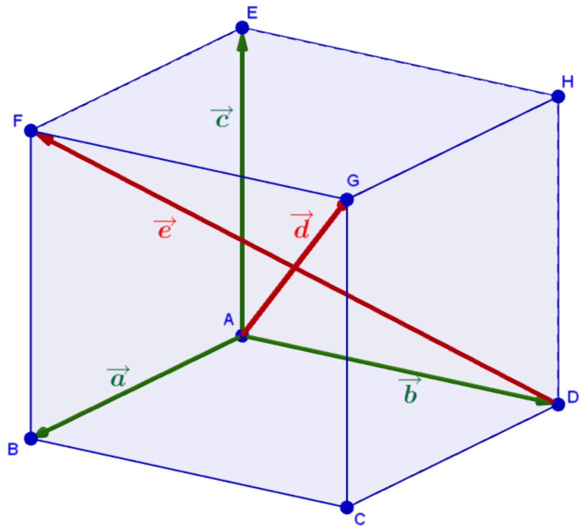
$$\vec{d} \cdot \vec{e} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} - \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b}}_{0} + \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{c}}_{0} + \underbrace{\vec{b} \cdot \vec{a}}_{0} - \vec{b} \cdot \vec{b} + \underbrace{\vec{b} \cdot \vec{c}}_{0} + \underbrace{\vec{c} \cdot \vec{a}}_{0} - \underbrace{\vec{c} \cdot \vec{b}}_{0} + \vec{c} \cdot \vec{c}$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} = |\vec{a}|^2 - \left|\vec{b}\right|^2 + |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 \neq 0$$

Lösungen: Vektorielle Beweise mit und ohne Koordinatensystem

Beweisen Sie mit einem vektoriellen Ansatz:
In einem Würfel ABCDEFGH sind die Raumdiagonalen $\overline{AG}$ und $\overline{DF}$ nicht zueinander orthogonal (s. Abb.).



Lösung (mit Koordinatensystem):

(1) Skizze und Einführung von Vektoren und Bezeichnungen:

o.B.d.A. Würfel ABCDEFGH ist ein Einheitswürfel mit $A(0|0|0)$; $B(1|0|0)$; $D(0|1|0)$ und $E(0|0|1)$.

(2) Voraussetzung:

$ABCDEFGH$ ist ein Würfel, d.h. $F(1|0|1)$; $G(1|1|1)$

(3) Behauptung:

$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{DF} \neq 0$

(4) Beweis:

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - 1 + 1 = 1 \neq 0$$

Demnach gilt: $\vec{d}$ und $\vec{e}$ sind nicht zueinander orthogonal.