**Adäquate Mengen von Junktoren – Lösungen**

1. (iii) {¬, ∨} ist eine adäquate Menge von Junktoren,

**Beweis:** Den Junktor ∧ kann man mithilfe von ¬ und ∨ ausdrücken, denn ¬ (¬A ∨ ¬B) ist nach den DeMorgan`schen Regeln logisch äquivalent zu (¬ (¬A)) ∧ (¬ (¬B)) und dies zu A ∧ B. Somit kann man zu jeder Aussage, die ∧ enthält eine logisch äquivalente Aussage finden, die ¬ und ∨ enthält. Da {¬, ∧} eine adäquate Menge von Junktoren ist, ist also auch {¬, ∨} eine.

(iv) {¬, →} ist eine adäquate Menge von Junktoren.  
**Beweis:** Den Junktor → kann man mithilfe von ¬ und ∨ ausdrücken, denn (¬A) ∨ B haben dieselbe Wahrheitstabelle.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B | ¬A | (¬A) ∨ B | A → B |
| w | w | f | w | w |
| w | f | f | f | f |
| f | w | w | w | w |
| f | f | w | w | w |

Somit kann man zu jeder Aussage, die → enthält eine logisch äquivalente Aussage finden, die ¬ und ∨ enthält. Da {¬, ∨} eine adäquate Menge von Junktoren ist, ist also auch {¬, →} eine.

**Beweis:** Für jeden Ausdruck, der nur die Junktoren ∨, ∧ und → enthält, gilt, dass in der ersten Zeile der Wahrheitstabelle der Wahrheitswert w steht. Denn:

Wenn A und B den Wahrheitswert w haben, so gilt dies auch für A ∨ B, für A ∧ B und für A → B. Somit auch für Hintereinanderausführungen dieser Junktoren, auch wenn mehr Aussagenvariablen auftreten. Da in der ersten Zeile der Wahrheitstabelle alle Aussagenvariablen den Wahrheitswert W haben, hat auch der Ausdruck insgesamt den Wahrheitswert w.

Damit kann nur mithilfe von ∨, ∧ und → kein zu ¬A logisch äquivalenter Ausdruck gebildet werden, denn bei diesem steht in der ersten Zeile der Wahrheitstabelle der Wahrheitswert f.

1. z.z.:{∨, ∧} und {∨, →} sind keine adäquate Mengen von Junktoren.  
   **Beweis:** Wenn eine der beiden eine adäquate Menge von Junktoren wäre, so wäre auch die größere Menge {∨, ∧, →}. Doch oben wurde bewiesen, dass diese keine ist.
2. z.z.: {|} ist eine adäquate Menge von Junktoren.  
   **Beweis:** Die linke Wahrheitstablle zeigt, dass¬A logisch äquivalent zu A|A ist. Die rechte zeigt, dass A ∧ B logisch äquivalent zu (A|B) | (A|B) ist. Da {¬, ∧} eine adäquate Menge von Junktoren ist, ist somit auch {|} eine.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | | A | ¬A | A⏐A | | w | f | f | | w | f | f | | f | w | w | | f | w | w | | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | A | B | A⏐B | (A⏐B) | (A⏐B) | | w | w | f | w | | w | f | w | f | | f | w | w | f | | f | f | w | f | |

1. z.z.: {↓} ist eine adäquate Menge von Junktoren.

**Beweis:** Die linke Wahrheitstabelle zeigt, dass ¬A logisch äquivalent zu A↓A ist. Die rechte zeigt, dass A ∧ B logisch äquivalent zu (A↓A) ↓ (B↓B) ist. Da {¬, ∧} eine adäquate Menge von Junktoren ist, ist somit auch {↓} eine.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | | A | ¬A | A↓A | | w | f | f | | w | f | f | | f | w | w | | f | w | w | | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | A | B | A↓A | B↓B | (A↓A) ↓ (B↓B) | | w | w | f | f | w | | w | f | f | w | f | | f | w | w | f | f | | f | f | w | w | f | |

1. (1) A → B ist logisch äquivalent zu A|(B|B) und zu A|(A|B).

(2) (A ∧ B) → A ist logisch äquivalent zu ((A|B) | (A|B)) | (A|A). Denn C → A ist nach (1) logisch äquivalent zu C | (A|A) und A ∧ B ist nach d) logisch äquivalent zu (A|B) | (A|B).  
Ebenfalls logisch äquivalent ist ((A|B) | (A|B)) | ((A|B) | ((A|B))|A).

1. A|B ist logisch äquivalent zu ¬(A ∧ B), wie man an der Wahrheitstabelle sieht, also zur Negation von Und (Not-And).  
   A↓B ist logisch äquivalent zu ¬(A ∨ B), wie man an der Wahrheitstabelle sieht, also zur Negation von Oder (Not-Or).