**Vertiefungskurs Mathematik**

**Lösungen: Beweis durch vollständige Fallunterscheidung**

**Satz vom Umfangswinkel**

**Fall 1:** M liegt auf einer Seite des Dreiecks ABC. (o.B.d.A. M liegt auf AB)



Voraussetzung: $\overline{MA}=\overline{MB}=\overline{MC}$

Behauptung: $δ=2γ$

Beweis:

Mit dem Satz des Thales folgt $γ=90°$.

Da δ ein gestreckter Winkel ist, folgt $δ=180°$. 🡺 $δ=2γ$ q.e.d.

**Fall 2:** M liegt innerhalb des Dreiecks ABC.



Voraussetzung: $\overline{MA}=\overline{MB}=\overline{MC}$

Behauptung: $δ=2γ$

Beweis:

Wegen $\overline{MA}=\overline{MC}$ist das Dreieck AMC gleichschenklig und somit gilt $α\_{1}=γ\_{1}$.

Wegen $\overline{MB}=\overline{MC}$ist das Dreieck MBC gleichschenklig und somit gilt $α\_{2}=γ\_{2}$.

Winkelsumme im Dreieck AMC 🡺 $α\_{1}+γ\_{1}+ε\_{1}=γ\_{1}+γ\_{1}+ε\_{1}=2γ\_{1}+ε\_{1}=180°$

Winkelsumme im Dreieck MBC 🡺 $α\_{2}+γ\_{2}+ε\_{2}=γ\_{2}+γ\_{2}+ε\_{2}=2γ\_{2}+ε\_{2}=180°$

Addiert man die beiden Gleichungen, so folgt: $2γ\_{1}+2γ\_{2}+ε\_{1}+ε\_{2}=360°$

Mit $γ\_{1}+γ\_{2}=γ$ folgt $2γ+ε\_{1}+ε\_{2}=360°$ 🡺 $2γ=360°-\left(ε\_{1}+ε\_{2}\right)$ (1)

Zudem gilt $δ+ε\_{1}+ε\_{2}=360°$ (Vollwinkel) 🡺 $δ=360°-\left(ε\_{1}+ε\_{2}\right)$ (2)

Aus (1) und (2) folgt $δ=2γ$ . q.e.d.

**Fall 3:** M liegt außerhalb des Dreiecks ABC.



Voraussetzung: $\overline{MA}=\overline{MB}=\overline{MC}$

Behauptung: $δ=2γ$

Beweis:

Wegen $\overline{MB}=\overline{MC}$ist das Dreieck BMC gleichschenklig und somit gilt $β\_{1}=γ\_{1}$.

Wegen $\overline{MA}=\overline{MC}$ist das Dreieck MCA gleichschenklig und somit gilt $α\_{1}=γ+γ\_{1}$.

Zudem gilt: $ε\_{1}=ε\_{2}$ (Scheitelwinkelsatz)

Winkelsumme im Dreieck BMs 🡺 $β\_{1}+δ+ε\_{2}=180°$ (1)

Winkelsumme im Dreieck MBC 🡺 $α\_{1}+γ+ε\_{1}=180°$ (2)

Es gilt: $γ=α\_{1}-γ\_{1}=α\_{1}-β\_{1}$ (3)

Löst man (1) nach $β\_{1}$ und (2) nach $α\_{1}$ auf, und setzt in (3) ein, dann folgt:

$$γ=α\_{1}-β\_{1}=180°-γ-ε\_{1}-\left(180°-δ-ε\_{2}\right)=-γ+δ+ε\_{2}-ε\_{1}$$

Wegen $ε\_{1}=ε\_{2}$ folgt $γ=-γ+δ$ 🡺 $δ=2γ$ q.e.d.