**Vertiefungskurs Mathematik**

**Lösungen: Aufgaben zum Beweis durch vollständige Induktion**

**AUFGABE 1**

(1) Induktionsanfang: $n=1$ 🡺 $1=\frac{1}{2}∙1∙\left(1+1\right)=1$

(2) Induktionsschritt: Für ein $k\in IN$ gilt $1+2+3+…+k=\frac{1}{2}k∙\left(k+1\right)$ (\*)

Zu zeigen: $1+2+3+…+k+\left(k+1\right)=\frac{1}{2}\left(k+1\right)∙\left(k+2\right)$

Mit (\*) folgt: $1+2+3+…+k+\left(k+1\right)=\frac{1}{2}k∙\left(k+1\right)+\left(k+1\right)$

 $=\frac{1}{2}k∙\left(k+1\right)+\frac{1}{2}∙\left(k+1\right)∙2=\frac{1}{2}\left(k+1\right)∙\left(k+2\right)$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**AUFGABE 2**

(1) Induktionsanfang: $n=1$ 🡺 $1^{2}=\frac{1}{6}∙1∙\left(1+1\right)∙\left(2∙1+1\right)=\frac{1}{6}∙2∙3=1$

(2) Induktionsschritt:

Für ein $k\in IN$ gilt $1^{2}+2^{2}+3^{2}+…+k^{2}=\frac{1}{6}k∙\left(k+1\right)∙\left(2k+1\right)$ (\*)

Zu zeigen: $1^{2}+2^{2}+3^{2}+…+k^{2}+\left(k+1\right)^{2}=\frac{1}{6}\left(k+1\right)∙\left(k+2\right)∙\left(2\left(k+1\right)+1\right)$

 $=\frac{1}{6}\left(k+1\right)∙\left(k+2\right)∙\left(2k+3\right)=\frac{1}{6}\left(k+1\right)∙\left(2k^{2}+7k+6\right)$

Mit (\*) folgt:

 $1^{2}+2^{2}+3^{2}+…+k^{2}+\left(k+1\right)^{2}=\frac{1}{6}k∙\left(k+1\right)∙\left(2k+1\right)+\left(k+1\right)^{2}$

 $=\left(k+1\right)∙\left[\frac{1}{6}k∙\left(2k+1\right)+\left(k+1\right)\right]=\frac{1}{6}\left(k+1\right)∙\left[k∙\left(2k+1\right)+6∙\left(k+1\right)\right]$

 $=\frac{1}{6}\left(k+1\right)∙\left[2k^{2}+k+6k+6\right]=\frac{1}{6}\left(k+1\right)∙\left[2k^{2}+7k+6\right]$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**AUFGABE 3**

(1) Induktionsanfang: $n=1$ 🡺 $1^{3}=\frac{1}{4}∙1^{2}∙\left(1+1\right)^{2}=\frac{1}{4}∙1∙4=1$

(2) Induktionsschritt:

Für ein $k\in IN$ gilt $1^{3}+2^{3}+3^{3}+…+k^{3}=\frac{1}{4}k^{2}∙\left(k+1\right)^{2}$ (\*)

Zu zeigen: $1^{3}+2^{3}+3^{3}+…+k^{3}+\left(k+1\right)^{3}=\frac{1}{4}∙\left(k+1\right)^{2}∙\left(k+2\right)^{2}$

Mit (\*) folgt:

 $1^{3}+2^{3}+3^{3}+…+k^{3}+\left(k+1\right)^{3}=\frac{1}{4}k^{2}∙\left(k+1\right)^{2}+\left(k+1\right)^{3}$

 $=\left(k+1\right)^{2}∙\left[\frac{1}{4}k^{2}+\left(k+1\right)\right]=\left(k+1\right)^{2}∙\frac{1}{4}∙\left[k^{2}+4\left(k+1\right)\right]$

 $=\frac{1}{4}\left(k+1\right)^{2}∙\left[k^{2}+4k+4\right]=\frac{1}{4}\left(k+1\right)^{2}∙\left(k+2\right)^{2}$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**AUFGABE 4**

(1) Induktionsanfang: $n=1$ 🡺 2$=1∙\left(1+1\right)=2$

(2) Induktionsschritt: Für ein $k\in IN$ gilt $2+4+6+…+2k=k∙\left(k+1\right)$ (\*)

Zu zeigen: $2+4+6+…+2k+2∙\left(k+1\right)=\left(k+1\right)∙\left(k+2\right)$

Mit (\*) folgt: $2+4+6+…+2k+2∙\left(k+1\right)=k∙\left(k+1\right)+2∙\left(k+1\right)$

 $=\left(k+1\right)∙\left(k+2\right)$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d

**AUFGABE 5**

1) Induktionsanfang: $n=1$ 🡺 $6^{1}-1=5=5∙1$ 🡺 5 | 5

(2) Induktionsschritt: Für ein $k\in IN$ gilt $6^{k}-1=5∙m$ ( mit $m\in IN$ ) (\*)

Zu zeigen: $6^{k+1}-1=5∙l$ ( mit $l\in IN$ )

Mit (\*) folgt: $6^{k+1}-1=6∙6^{k}-6+5=6∙\left(6^{k}-1\right)+5=6∙5∙m+5$

 $=5∙\left(6m+1\right)=5∙l$ ( mit $l\in IN$ )

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**AUFGABE 6**

(1) Induktionsanfang: $n=1$ 🡺 $1^{3}-1=0=6∙0$ 🡺 6 | 0

(2) Induktionsschritt: Für ein $k\in IN$ gilt $k^{3}-k=6∙m$ ( mit $m\in IN$ ) (\*)

Zu zeigen: $\left(k+1\right)^{3}-\left(k+1\right)=6∙l$ ( mit $l\in IN$ )

Mit (\*) folgt: $\left(k+1\right)^{3}-\left(k+1\right)=k^{3}+3k^{2}+3k+1-k-1$

 $=k^{3}-k+3k^{2}+3k=6m+3k^{2}+3k=6m+3k∙\left(k+1\right)$

Fall1: k ist gerade, d.h. $k=2r$ mit $r\in IN$

$$6m+3k∙\left(k+1\right)=6m+3∙2r∙\left(k+1\right)=6m+6r∙\left(k+1\right) $$

$$=6∙\left(m+r∙\left(k+1\right)\right)=6∙l$$

Fall2: k ist ungerade, also ist k + 1 ist gerade, d.h. $k+1=2s$ mit $s\in IN$

$$6m+3k∙\left(k+1\right)=6m+3k∙2s=6m+6ks=6∙\left(m+ks\right)=6∙l$$

 (3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**AUFGABE 7** Für alle $n\in IN$ gilt: $n^{3}+\left(n+1\right)^{3}+\left(n+2\right)^{3}=9∙m$ mit $m\in IN$ .

(1) Induktionsanfang: $n=1$ 🡺 $1^{3}+2^{3}+3^{3}=1+8+27=36=9∙4$

(2) Induktionsschritt: Für ein $k\in IN$ gilt $k^{3}+\left(k+1\right)^{3}+\left(k+2\right)^{3}=9∙m$ (\*)

Zu zeigen: $\left(k+1\right)^{3}+\left(k+2\right)^{3}+\left(k+3\right)^{3}=9∙l$ ( mit $l\in IN$ )

Mit (\*) folgt:

$$\left(k+1\right)^{3}+\left(k+2\right)^{3}+\left(k+3\right)^{3}=\left(k+1\right)^{3}+\left(k+2\right)^{3}+k^{3}+9k^{2}+27k+27$$

 $=9m+9k^{2}+27k+27=9∙\left(m+k^{2}+3k+3\right)=9∙l$

 $=\frac{1}{4}\left(k+1\right)^{2}∙\left[k^{2}+4k+4\right]=\frac{1}{4}\left(k+1\right)^{2}∙\left(k+2\right)^{2}$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**AUFGABE 8**

(1) Induktionsanfang: $n=1$ 🡺 $2^{1}=2>1$

(2) Induktionsschritt: Für ein $k\in IN$ gilt $2^{k}>k$ (\*)

Zu zeigen: $2^{k+1}>k+1$

Mit (\*) folgt: $2^{k+1}=2∙2^{k}>2∙k=k+k\geq k+1$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**AUFGABE 9**

(1) Induktionsanfang: $n=1$ 🡺 $3^{1}=3>1^{2}=1$

(2) Induktionsschritt: Für ein $k\in IN$ gilt $3^{k}>k^{2}$ (\*)

Zu zeigen: $3^{k+1}>\left(k+1\right)^{2}$

Mit (\*) folgt: $3^{k+1}=3∙3^{k}>3∙k^{2}=k^{2}+k^{2}+k^{2}\geq k^{2}+k^{2}+1$

Für n = 2 gilt $3^{2}=9>2^{2}=4$ 🡺 Für $k\geq 2$ folgt demnach $k^{2}\geq 2k$.

🡺 $3^{k+1}>k^{2}+k^{2}+1\geq k^{2}+2k+1=\left(k+1\right)^{2}$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**AUFGABE 10**

(1) Induktionsanfang: $n=3$ 🡺 $3^{2}=9>2∙3+1=7$

(2) Induktionsschritt: Für ein $k\in IN$ mit k$\geq 3$ gilt $k^{2}>2k+1$ (\*)

Zu zeigen: $\left(k+1\right)^{2}>2∙\left(k+1\right)+1=2k+3$

Mit (\*) folgt: $\left(k+1\right)^{2}=k^{2}+2k+1>2k+1+2k+1=2k+2k+2>2k+3$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**AUFGABE 11**

(1) Induktionsanfang: $n=5$ 🡺 $2^{5}=32>5^{2}=25$

(2) Induktionsschritt: Für ein $k\in IN$ mit k$\geq 5$ gilt $2^{k}>k^{2}$ (\*)

Zu zeigen: $2^{k+1}>\left(k+1\right)^{2}=k^{2}+2k+1$

Mit (\*) folgt: $2^{k+1}=2∙2^{k}>2k^{2}=k^{2}+k^{2}\geq k^{2}+5k=k^{2}+2k+3k$

🡺 $2^{k+1}>k^{2}+2k+3k>k^{2}+2k+1$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**AUFGABE 12**

(1) Induktionsanfang: $n=1$ 🡺 $f^{'}\left(x\right)=x∙e^{x}+e^{x}=e^{x}∙\left(x+1\right)$

(2) Induktionsschritt: Für ein $k\in IN$ mit k$\geq 1$ gilt $f^{(k)}\left(x\right)=\left(x+k\right)∙e^{x}$ (\*)

Zu zeigen: $f^{(k+1)}\left(x\right)=\left(x+k+1\right)∙e^{x}$

Es gilt: $f^{\left(k+1\right)}\left(x\right)=\left(f^{\left(k\right)}\left(x\right)\right)^{'}$

Mit (\*) folgt: $f^{\left(k+1\right)}\left(x\right)=\left(f^{\left(k\right)}\left(x\right)\right)^{'}=\left(\left(x+k\right)∙e^{x}\right)^{'}=\left(x+k\right)∙e^{x}+e^{x}$

$$f^{\left(k+1\right)}\left(x\right)=\left(x+k+1\right)∙e^{x}$$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**AUFGABE 13**

(1) Induktionsanfang: $n=1$ 🡺 $f^{'}\left(x\right)=x∙e^{-x}∙(-1)+e^{-x}=e^{-x}∙\left(1-x\right)$

 $f^{'}\left(x\right)=e^{-x}∙\left(1-x\right)=\left(-1\right)^{1-1}∙(1-x)∙e^{-x}$

(2) Induktionsschritt: Für ein $k\in IN$ mit k$\geq 1$ gilt $f^{(k)}\left(x\right)=\left(-1\right)^{k-1}\left(k-x\right)∙e^{-x}$ (\*)

Zu zeigen: $f^{(k+1)}\left(x\right)=\left(-1\right)^{k}∙\left(k+1-x\right)∙e^{-x}$

Es gilt: $f^{\left(k+1\right)}\left(x\right)=\left(f^{\left(k\right)}\left(x\right)\right)^{'}$

Mit (\*) folgt: $f^{\left(k+1\right)}\left(x\right)=\left(f^{\left(k\right)}\left(x\right)\right)^{'}=\left(\left(-1\right)^{k-1}\left(k-x\right)∙e^{-x}\right)^{'}$

$$f^{\left(k+1\right)}\left(x\right)=\left(-1\right)^{k-1}∙\left(-1\right)∙e^{x}+\left(-1\right)^{k-1}∙\left(k-x\right)∙e^{-x}∙(-1)$$

$$f^{\left(k+1\right)}\left(x\right)=\left(-1\right)^{k}∙e^{x}+\left(-1\right)^{k}∙\left(k-x\right)∙e^{x}=\left(-1\right)^{k}∙e^{x}∙\left(k+1-x\right)$$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**AUFGABE 14**

(1) Induktionsanfang: $n=1$ 🡺 $f^{'}\left(x\right)=2x∙e^{x}+x^{2}∙e^{x}=e^{x}∙\left(x^{2}+2x\right)$

(2) Induktionsschritt:

Für ein $k\in IN$ mit k$\geq 1$ gilt $f^{(k)}\left(x\right)=\left[x^{2}+2k∙x+k∙\left(k-1\right)\right]∙e^{x}$ (\*)

Zu zeigen: $f^{(k+1)}\left(x\right)=\left[x^{2}+2\left(k+1\right)∙x+(k+1)∙\left(k+1-1\right)\right]∙e^{x}$

D.h. $f^{(k+1)}\left(x\right)=\left[x^{2}+2\left(k+1\right)∙x+(k+1)∙k\right]∙e^{x}$

Es gilt: $f^{\left(k+1\right)}\left(x\right)=\left(f^{\left(k\right)}\left(x\right)\right)^{'}$

Mit (\*) folgt: $f^{\left(k+1\right)}\left(x\right)=\left(f^{\left(k\right)}\left(x\right)\right)^{'}=\left(\left[x^{2}+2k∙x+k∙\left(k-1\right)\right]∙e^{x}\right)^{'}$

$$f^{\left(k+1\right)}\left(x\right)=\left(2x+2k\right)∙e^{x}+\left[x^{2}+2k∙x+k∙\left(k-1\right)\right]∙e^{x}$$

$$f^{\left(k+1\right)}\left(x\right)=\left[2x+2k+x^{2}+2k∙x+k^{2}-k\right]∙e^{x}=\left[x^{2}+2k∙x+2x+k^{2}+k\right]∙$$

$$f^{\left(k+1\right)}\left(x\right)=\left[x^{2}+2\left(k+1\right)∙x+(k+1)∙k\right]∙e^{x}$$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**AUFGABE 15**

(1) Induktionsanfang: $n=3$ 🡺 $\frac{1}{2}∙3∙\left(3-3\right)=0$

Da man in ein Dreieck keine einzige Diagonale einzeichnen kann, ist die Behauptung für $n=3$ nachgewiesen.

(2) Induktionsschritt: Für ein $k\in IN$ mit k$\geq 3$ gilt für die Anzahl $a\_{k}$ der Diagonalen in

 einem konvexen k- Eck: $a\_{k}= \frac{1}{2}∙k∙\left(k-3\right)$ (\*)

Zu zeigen: Für die Anzahl $a\_{k+1}$ der Diagonalen in einem konvexen$ (k+1)$- Eck gilt

 $a\_{k+1}= \frac{1}{2}∙\left(k+1\right)∙\left(k-2\right)$.



Alle „alten“ $ a\_{k}= \frac{1}{2}∙k∙\left(k-3\right)$ Diagonalen des k- Ecks sind auch Diagonalen des

 $(k+1)$ - Ecks. Es kommen aber noch „neue“ Diagonalen hinzu.

Anzahl $b\_{k}$ der „neuen“ Diagonalen, die hinzukommen:

Man kann die Verbindungsstrecke vom Punkt $P\_{k+1}$ zu allen k Punkten $P\_{i}$ mit

$i\in \{1;2;…;k\}$ einzeichnen. Von diesen k verschiedenen Strecken sind zwei, nämlich $\overline{P\_{k+1}P\_{1}}$ und $\overline{P\_{k+1}P\_{k}}$ , Seiten des $(k+1)$ – Ecks (also keine Diagonalen).

Allerdings wird die „alte“ Seite $\overline{P\_{1}P\_{k}}$ jetzt zu einer Diagonalen.

🡺 $b\_{k}=k-2+1=k-1$

Somit gilt: $a\_{k+1}=a\_{k}+k-1=\frac{1}{2}∙k∙\left(k-3\right)+k-1=\frac{1}{2}k^{2}-\frac{3}{2}k+k-1$

 $a\_{k+1}=\frac{1}{2}k^{2}-\frac{1}{2}k-1=\frac{1}{2}∙\left(k^{2}-k-2\right)=\frac{1}{2}∙\left(k-2\right)∙\left(k+1\right)$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**AUFGABE 16**

(1) Induktionsanfang: $n=1$

 $\frac{1}{2}∙\left(1^{2}+1+2\right)=\frac{1}{2}∙4=2$

 Da eine Gerade die Zeichenebene in genau zwei Gebiete zerlegt, ist die

 Behauptung für $n=1$ nachgewiesen.

(2) Induktionsschritt: Für ein $k\in IN$ mit k$\geq 1$ gilt für die Anzahl $a\_{k}$ der Gebiete

 $a\_{k}= \frac{1}{2}∙\left(k^{2}+k+2\right)$ (\*)

Zu zeigen: Für die Anzahl $a\_{k+1}$ der Gebiete gilt:

 $a\_{k+1}= \frac{1}{2}∙\left(\left(k+1\right)^{2}+(k+1)+2\right)=\frac{1}{2}∙\left(k^{2}+3k+4\right)$

Die „neue“ Gerade $g\_{k+1}$ schneidet die bisherigen k Geraden in maximal k ver-schiedenen Punkten $P\_{i}$ mit $i\in \{1;2;…;k\}$. Diese k Punkte unterteilen die Gerade $g\_{k+1}$ in maximal $k+1$ Teile (dies sind$ k-1$ Strecken und zwei Halbgeraden). Diese $k+1$ Teile liegen in maximal $k+1$ Gebieten und zerlegen jedes dieser Gebiete in zwei Teile. Daher entstehen dadurch maximal $k+1$ „neue“ Gebiete.

Die Abbildung verdeutlicht die Situation für $k=4$.



Somit gilt: $a\_{k+1}=a\_{k}+k+1$

Mit (\*) folgt: $a\_{k+1}=\frac{1}{2}∙\left(k^{2}+k+2\right)+k+1=\frac{1}{2}∙\left(k^{2}+k+2+2k+2\right)$

 $a\_{k+1}=\frac{1}{2}∙\left(k^{2}+3k+4\right)$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.