# Gleichungen Standardtechniken

Dienstag, 5. Januar 2021 09:15

## Standardtechniken, Lösen im Kopf:

1. $(x-1)^2 = 25 \quad | \sqrt{\ldots}$

$x-1 = 5$ oder $x-1 = -5$

$x_1 = 6$ oder $x_2 = -4$

$\underline{L = \{-4; 6\}}$

im Kopf: „Die Klammer muss ±5 ergeben."

Standardtechnik: Potenzgleichung mit geradem Exponenten

2. $\frac{2}{x+7} = \frac{2}{13} \quad |$ Kehrwert

$\frac{x+7}{2} = \frac{13}{2} \quad | \cdot 2$

$x+7 = 13 \quad | -7$

$x = 6$

$\underline{L = \{6\}}$

im Kopf: „Der Nenner $x+7$ muss 13 ergeben."

Standardtechnik: Kehrwert bilden & Äquivalenzumformungen

3. $x(3x^2+x+2) = 3(5+x^3)$

$3x^3+x^2+2x = 15+3x^3 \quad | -3x^3-15$

$x^2+2x-15 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4\cdot 1\cdot(-15)}}{2\cdot 1}$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm 8}{2}$

$x_1 = 3$ oder $x_2 = -5$

$\underline{L = \{-5; 3\}}$

Standardtechniken: Ausmultiplizieren, Äquivalenzumformungen, „Mitternachtsformel"

4. $\sqrt{x-1} = 10 \quad | (\ldots)^2$

$x-1 = 100 \quad | +1$

$x = 101$

Probe: $\sqrt{101-1} = \sqrt{100} = 10$ ✓

$\underline{L = \{101\}}$

im Kopf: „Unter der Wurzel muss 100 stehen."

Standardtechniken: Quadrieren mit Probe

5. $x^3 - \frac{1}{2}x^5 = 0$

$x^3(1-\frac{1}{2}x^2) = 0$

Standardtechniken: Ausmultiplizieren, Satz vom Nullprodukt

SvNP: 1) $x^3 = 0$

$x_1 = 0$

2) $1 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \quad | +\frac{1}{2}x^2$

$1 = \frac{1}{2}x^2 \quad | \cdot 2$

$2 = x^2 \quad | \sqrt{\phantom{x}}$

$x_{2/3} = \pm\sqrt{2}$

$\underline{L = \{0; \pm\sqrt{2}\}}$

6. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

Standardtechniken: Substitution, „Mitternachtsformel"

Substitution: $u = x^2$

$u^2 - 3u - 4 = 0$

$u_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$

$u_{1/2} = \frac{3 \pm 5}{2}$

$u_1 = 4$ oder $u_2 = -1$

Rücksubst.: 1) $x^2 = 4 \quad | \sqrt{\ldots}$

$x_{1/2} = \pm 2$

2) $x^2 = -1$ ↯

$\underline{L = \{\pm 2\}}$

## Der Satz von Vieta

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (1)$$

Linke Seite von (1) aus:

$$(x-a)(x-b) = x^2 - ax - bx + ab = x^2 + (-a-b)x + ab$$

Vergleich mit (1):

$$p = -a-b \quad ; \quad q = ab$$

Beispiel: $x^2 - 8x + 15 = 0$

$q = 15 = 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5 = a \cdot b$

$p = -8 = -a-b$ ergibt sich z.B. mit $a=3$, $b=5$

Lösungen: $x_1 = a = 3$ ; $x_2 = b = 5$

Satz von Vieta: Für die Lösungen a und b einer quadratischen Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ gilt: $p = -a-b$ und $q = a \cdot b$

## Aufgaben:

1a) $(x+2)^3 = 27$ „Die Klammer muss 3 ergeben."

$\underline{L = \{1\}}$

b) $(8-x)^4 = 16$ „Die Klammer muss $\pm 2$ ergeben."

$\underline{L = \{6; 10\}}$

c) $\sqrt{67-x} = 8$ „Unter der Wurzel muss 64 stehen."

$\underline{L = \{3\}}$

d) $\frac{2}{14} = \frac{1}{x+4}$ „$\frac{2}{14} = \frac{1}{7}$. Der Nenner muss 7 ergeben."

$\underline{L=\{3\}}$

e) $x^2 - x = 0$ Entweder im Kopf ausklammern zu $x(x-1)=0$

$\underline{L=\{0;1\}}$ oder man „sieht“ $0^2-0=0$ und $1^2-1=0$.

f) $2x^3 = 4x^2$ Man „sieht“ $0=0$ und dass auf beiden Seiten

$\underline{L=\{0;2\}}$ je 4 Faktoren $2\cdot x\cdot x\cdot x = 2\cdot 2\cdot x\cdot x$ stehen, also $x=2$.

2.a) $x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$

$\underline{L=\{2;3\}}$

b) $x^2-8x-20=0$

$(x-10)(x+2)=0$

$\underline{L=\{-2;10\}}$

c) $x^2-11x+24=0$

$(x-3)(x-8)=0$

$\underline{L=\{3;8\}}$

d) $x^2+\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}=0$

$(x+3)(x+\frac{1}{2})=0$

$\underline{L=\{-3;-\frac{1}{2}\}}$

e) $x^2+\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}=0$

$(x-\frac{1}{3})(x+2)=0$

$\underline{L=\{-2;\frac{1}{3}\}}$

f) $x^2-3\sqrt{2}x+4=0$

$(x-2\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$

$\underline{L=\{\sqrt{2};2\cdot\sqrt{2}\}}$

3. a) $x^2(4x+1)+5 = 5(x-1)+2(x+2x^3)$

$4x^3+x^2+5 = 5x-5+2x+4x^3 \quad |-4x^3-7x+5$

$x^2-7x+10=0$

$(x-2)(x-5)=0$

$\underline{L=\{2;5\}}$

b) $5x^4+x^5+4x^3 = -3x(x^3+x^2)$

$5x^4+x^5+4x^3 = -3x^4-3x^3 \quad |+3x^4+3x^3$

$x^5+8x^4+7x^3=0$

$x^3(x^2+8x+7)=0$

$x^3(x+1)(x+7)=0$

$\underline{L=\{0;-1;-7\}}$

c) $3x^4-87x^2+300=0 \quad |:3$

Subst.: $u=x^2$

$u^2-29u+100=0$

$(u-25)(u-4)=0$

$u_1=25;\ u_2=4$

Rücksubst.: 1) $x^2=25$ 2) $x^2=4$

$x_{1/2}=\pm 5$ $x_{3/4}=\pm 2$

$\underline{L=\{\pm 5;\pm 2\}}$