**Vertiefungskurs Mathematik**

**Lösungen: Aufgaben zu Polynomgleichungen in C**

**AUFGABE 1**

a) $x\_{1}=3+3i$ ; $x\_{2}=3-3i$ b) $x\_{1}=-3$ ; $x\_{2}=-5$ c) $x\_{1;2}=\frac{11\pm \sqrt{7}i}{4}$

**AUFGABE 2**

a) Probieren liefert: $x\_{1}=2$

 Polynomdivision liefert: $x^{3}-2x^{2}+x-2=(x-2)∙\left(x^{2}+1\right)$

 Aus $x^{2}+1=0$ folgt: $x\_{2}=i$ ; $x\_{3}=-i$

b) Probieren liefert: $x\_{1}=-1$

 Polynomdivision liefert: $x^{3}-x^{2}+3x+5=(x+1)∙\left(x^{2}-2x+5\right)$

 Aus $x^{2}-2x+5=0$ folgt: $x\_{2}=1+2i$ ; $x\_{3}=1-2i$

c) Substitution $x^{2}=u$ liefert: $u^{2}-5u-36=0$

 Mit Vieta folgt: $u^{2}-5u-36=\left(u-9\right)∙\left(u+4\right)=0$ 🡺 $u\_{1}=9$ ; $u\_{2}=-4$

 Resubstitution liefert: $x\_{1}=3$ ; $x\_{2}=-3$ ; $x\_{3}=2i$ ; $x\_{4}=-2i$

**AUFGABE 3**

a) Polynomdivision liefert: $x^{3}-9x^{2}+27x-28=(x-4)∙\left(x^{2}-5x+7\right)$

 Aus $x^{2}-5x+7=0$ folgt: $x\_{2;3}=\frac{5\pm \sqrt{3}i}{2}$

b) Da $x\_{1}$ eine Lösung ist, ist auch $x\_{2}=\overline{x\_{1}}=-1,4-i$ eine Lösung.

 Es gilt: $\left(x-\left(-1,4+i\right)\right)∙\left(x-\left(-1,4-i\right)\right)=x^{2}+2,8x+2,96$

 Polynomdivision liefert:

 $125x^{3}+300x^{2}+230x-148=\left(x^{2}+2,8x+2,96\right)∙(125x-50)$

 Aus$ 125x-50=0$ folgt $x\_{2}=\frac{2}{5}=0,4$

**AUFGABE 4**

a) Polynomdivision liefert:

 $2x^{4}-9x^{3}+15x^{2}-16x+12=\left(x-2\right)^{2}∙\left(2x^{2}-x+3\right)$

 Aus $2x^{2}-x+3=0$ folgt: $x\_{2;3}=\frac{1\pm \sqrt{23}i}{4}$

 b) Da $x\_{1}$ eine Lösung ist, ist auch $x\_{2}=\overline{x\_{1}}=1-i$ eine Lösung.

 $x^{5}-3x^{4}+3x^{3}-2x=x∙\left(x^{4}-3x^{3}+3x^{2}-2\right)$ 🡺 $x\_{3}=0$

 Es gilt: $\left(x-\left(1+i\right)\right)∙\left(x-\left(1-i\right)\right)=x^{2}-2x+2$

 Polynomdivision liefert:

 $x^{4}-3x^{3}+3x^{2}-2=\left(x^{2}-2x+2\right)∙\left(x^{2}-x-1\right)$

 Aus $x^{2}-x-1=0$ folgt: $x\_{4;5}=\frac{1\pm \sqrt{5}}{2}$

**AUFGABE 5**

a) Substitution $x^{2}=u$ liefert: $2u^{2}-8u-24=0$ 🡺 $u^{2}-4u-12=0$

 Mit Vieta folgt: $u^{2}-4u-12=\left(u-6\right)∙\left(u+2\right)=0$ 🡺 $u\_{1}=6$ ; $u\_{2}=-2$

 Resubstitution liefert: $x\_{1}=\sqrt{6}$ ; $x\_{2}=-\sqrt{6}$ ; $x\_{3}=\sqrt{2}∙i$ ; $x\_{4}=-\sqrt{2}∙i$

 $L=\left\{\sqrt{6} ; -\sqrt{6} ; \sqrt{2}∙i ; -\sqrt{2}∙i\right\}$

b) Substitution $x^{2}=u$ liefert: $u^{2}+3u+4=0$

 $u\_{1;2}=\frac{-3\pm \sqrt{7}i}{2}$

 Resubstitution liefert: $x^{2}=\frac{-3+\sqrt{7}i}{2}=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i$

 Ansatz: $x=a+bi$ 🡺 $x^{2}=a^{2}-b^{2}+2abi$ (a und b sind dabei reelle Zahlen)

 Koeffizientenvergleich liefert: $a^{2}-b^{2}=-\frac{3}{2}$ (1) und $2ab=\frac{\sqrt{7}}{2}$ (2)

 Löst man (2) nach b auf, und setzt dies in (1) ein so folgt: $a^{2}-\frac{7}{16a^{2}}=-\frac{3}{2}$ (3)

 Aus (3) folgt: $16a^{4}+24a^{2}-7=0$ bzw. mit $a^{2}=c$ 🡺 $16c^{2}+24c-7=0$

 🡺 $c\_{1;2}=\frac{-24\pm 32}{32}=\frac{-3\pm 4}{4}$ 🡺 $c\_{1}=\frac{1}{4}$ ; $c\_{2}=-\frac{7}{4}$

 Somit folgt: $a\_{1}=\frac{1}{2}$ ; $a\_{2}=-\frac{1}{2}$ 🡺 $b\_{1}=\frac{\sqrt{7}}{2}$ ; $b\_{2}=-\frac{\sqrt{7}}{2}$

 Somit erhält man die Lösungen: $x\_{1}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i$ ; $x\_{2}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i$

 Zudem sind auch $x\_{3}=\overline{x\_{1}}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i$ und $x\_{4}=\overline{x\_{2}}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i$ Lösungen.

 $L=\left\{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i ; \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i ; -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i ; -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i\right\}$

c) Substitution $x^{2}=u$ liefert: $u^{2}+5u+4=0$

 Mit Vieta folgt: $u^{2}+5u+4=\left(u+1\right)∙\left(u+4\right)=0$ 🡺 $u\_{1}=-1$ ; $u\_{2}=-4$

 Resubstitution liefert: $x\_{1}=i$ ; $x\_{2}=-i$ ; $x\_{3}=2∙i$ ; $x\_{4}=-2∙i$

 $L=\left\{i ; -i ; 2i ; -2i\right\}$