**Vertiefungskurs Mathematik**

Eine quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten hat in C immer zwei Lösungen

(bzw. eine doppelte reelle Lösung). In der „Mitternachtsformel“ sieht man sofort, dass

für die beiden komplexen Lösungen $z\_{1}$ und $z\_{2}$ gilt: $z\_{2}=\overline{z\_{1}}$ .

Wie wollen folgenden weitergehenden Satz A beweisen:

Wenn ein Polynom $p\_{n}$ vom Grad $n\geq 2$ mit reellen Koeffizienten in C die komplexe

Nullstelle $z\_{1}$ besitzt, dann ist auch $z\_{2}=\overline{z\_{1}}$ eine Nullstelle des Polynoms $p\_{n}$.

Um diesen Satz zu beweisen, müssen wir zunächst einige andere einfache

elementare Sätze über komplexe Zahlen beweisen.

Satz 1: Sei $z\_{1}=a\_{1}+b\_{1}∙i$ und $z\_{2}=a\_{2}+b\_{2}∙i$ dann gilt: $\overline{z\_{1}}+\overline{z\_{2}}= \overline{z\_{1}+z\_{2}}$ .

Beweis:

$\overline{z\_{1}}+\overline{z\_{2}}=a\_{1}-b\_{1}∙i+a\_{2}-b\_{2}∙i=\left(a\_{1}+a\_{2}\right)-\left(b\_{1}+b\_{2}\right)∙i$

$$\overline{z\_{1}+z\_{2}}=\overline{a\_{1}+b\_{1}∙i+a\_{2}+b\_{2}∙i}=\overline{\left(a\_{1}+a\_{2}\right)+\left(b\_{1}+b\_{2}\right)∙i}$$

$$\overline{z\_{1}+z\_{2}}=\left(a\_{1}+a\_{2}\right)-\left(b\_{1}+b\_{2}\right)∙i$$

🡺$\overline{z\_{1}}+\overline{z\_{2}}=\overline{z\_{1}+z\_{2}}$ q.e.d.

Satz 2: Sei $z\_{1}=a\_{1}+b\_{1}∙i$ und $z\_{2}=a\_{2}+b\_{2}∙i$ dann gilt: $\overline{z\_{1}}∙\overline{z\_{2}}= \overline{z\_{1}∙z\_{2}}$ .

Beweis:

$\overline{z\_{1}}∙\overline{z\_{2}}=\left(a\_{1}-b\_{1}∙i\right)∙\left(a\_{2}-b\_{2}∙i\right)=a\_{1}∙a\_{2}+b\_{1}∙b\_{2}∙i^{2}-a\_{1}∙b\_{2}∙i-b\_{1}∙a\_{2}∙i$

$$\overline{z\_{1}}∙\overline{z\_{2}}=\left(a\_{1}∙a\_{2}-b\_{1}∙b\_{2}\right)-\left(a\_{1}∙b\_{2}+b\_{1}∙a\_{2}\right)∙i$$

$$\overline{z\_{1}∙z\_{2}}=\overline{\left(a\_{1}+b\_{1}∙i\right)∙\left(a\_{2}+b\_{2}∙i\right)}=\overline{a\_{1}∙a\_{2}+b\_{1}∙b\_{2}∙i^{2}+a\_{1}∙b\_{2}∙i+b\_{1}∙a\_{2}∙i}$$

$$\overline{z\_{1}∙z\_{2}}=\overline{\left(a\_{1}∙a\_{2}-b\_{1}∙b\_{2}\right)+\left(a\_{1}∙b\_{2}+b\_{1}∙a\_{2}\right)∙i}$$

$$\overline{z\_{1}∙z\_{2}}=\left(a\_{1}∙a\_{2}-b\_{1}∙b\_{2}\right)-\left(a\_{1}∙b\_{2}+b\_{1}∙a\_{2}\right)∙i$$

🡺 $\overline{z\_{1}}∙\overline{z\_{2}}=\overline{z\_{1}∙z\_{2}}$ q.e.d.

Satz 3: Sei $z=a+b∙i$ dann gilt für $n\geq 2$ : $\overline{z}^{ n}= \overline{z^{n}}$ .

Beweis:

(1) Induktionsanfang: $n=2$ ; Mit Satz 2 folgt sofort: $\overline{z}^{ 2}=\overline{z}∙\overline{z}=\overline{z∙z}=\overline{z^{2}}$

Damit ist die Behauptung für $n=2$ nachgewiesen.

(2) Induktionsschritt: Für ein $k\in IN$ gilt: $\overline{z}^{ k}= \overline{z^{k}}$ (\*)

Zu zeigen: $\overline{z}^{ k+1}= \overline{z^{k+1}}$

Mit (\*) folgt: $\overline{z}^{ k+1}=\overline{z}∙\overline{z}^{ k}=\overline{z}∙\overline{z^{k}}$

Setzt man im Satz 2 für $z\_{1}=z$ und für $z\_{2}=z^{k}$ ein, dann folgt: $\overline{z}∙\overline{z^{k}}=\overline{z∙z^{k}}=\overline{z^{k+1}}$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

Satz 4: Sei $z\_{k}=a\_{k}+b\_{k}∙i$ dann gilt für $n\geq 2$: $\overline{\sum\_{k=1}^{n}z\_{k}}^{ }= \sum\_{k=1}^{n}\overline{z\_{k}}$ .

Beweis:

(1) Induktionsanfang: $n=2$ ; Mit Satz 1 folgt sofort: $\overline{z\_{1}+z\_{2}}=\overline{z\_{1}}+\overline{z\_{2}}$

Damit ist die Behauptung für $n=2$ nachgewiesen.

(2) Induktionsschritt: Für ein $l\in IN$ gilt: $\overline{\sum\_{k=1}^{l}z\_{k}}^{ }= \sum\_{k=1}^{l}\overline{z\_{k}}$ (\*)

Zu zeigen: $\overline{\sum\_{k=1}^{l+1}z\_{k}}^{ }= \sum\_{k=1}^{l+1}\overline{z\_{k}}$

$\overline{\sum\_{k=1}^{l+1}z\_{k}}^{ }=\overline{\sum\_{k=1}^{l}z\_{k}+z\_{l+1}}^{ }$

Aus Satz 1 folgt mit $z\_{1}=\sum\_{k=1}^{l}z\_{k}$ und $z\_{2}=z\_{l+1}$ sofort:

 $\overline{\sum\_{k=1}^{l}z\_{k}+z\_{l+1}}^{ }=\overline{\sum\_{k=1}^{l}z\_{k}}^{ }+\overline{z\_{l+1}}$

Mit (\*) folgt: $\overline{\sum\_{k=1}^{l}z\_{k}}^{ }+\overline{z\_{l+1}}=\sum\_{k=1}^{l}\overline{z\_{k}}+\overline{z\_{l+1}}=\sum\_{k=1}^{l+1}\overline{z\_{k}}$

🡺 $\overline{\sum\_{k=1}^{l+1}z\_{k}}^{ }= \sum\_{k=1}^{l+1}\overline{z\_{k}}$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

Beweis von Satz A:

Voraussetzung: $p\_{n}\left(z\right)=\sum\_{k=0}^{n}a\_{k}∙z^{k}$ mit$ a\_{k}\in IR$

 $z\_{1}$ ist Nullstelle von $p\_{n}$ , d.h. $p\_{n}\left(z\_{1}\right)=\sum\_{k=0}^{n}a\_{k}∙z\_{1}^{k}=0$

Behauptung: $\overline{z\_{1}}$ ist Nullstelle von $p\_{n}$ , d.h. $p\_{n}\left(\overline{z\_{1}}\right)=0$

Beweis:

Aus Satz 2 und $a\_{k}\in IR$ ($d.h.a\_{k}=\overline{a\_{k}}$ ) folgt: $a\_{k}∙\overline{z\_{1}}=\overline{a\_{k}}∙\overline{z\_{1}}=\overline{a\_{k}∙z\_{1}}$

Mit Satz 3 folgt:

 $p\_{n}\left(\overline{z\_{1}}\right)=\sum\_{k=0}^{n}a\_{k}∙\overline{z\_{1}}^{k}=\sum\_{k=0}^{n}\overline{a\_{k}}∙\overline{z\_{1}}^{k}=\sum\_{k=0}^{n}\overline{a\_{k}}∙\overline{z\_{1}^{k}}=\sum\_{k=0}^{n}\overline{a\_{k}∙z\_{1}^{k}} $

Mit Satz 4 folgt: $p\_{n}\left(\overline{z\_{1}}\right)=\sum\_{k=0}^{n}\overline{a\_{k}∙z\_{1}^{k}} =\overline{\sum\_{k=0}^{n}a\_{k}∙z\_{1}^{k}}=\overline{p\_{n}\left(z\_{1}\right)}=\overline{0}=0$

Somit ist auch $\overline{z\_{1}}$ eine Nullstelle von $p\_{n}$. q.e.d.