## Wurzeln aus komplexen Zahlen

**Aufgabe 1** Finden Sie zwei verschiedene Lösungen für die Gleichung .  
Formulieren Sie den „Trick“ für die zweite Lösung in Worten.

**Aufgabe 2** Leiten Sie aus Aufgabe 1 zwei Lösungen für die Gleichung her.

**Definition** Eine komplexe Zahl a heißt **eine n-te Wurzel von b** (), wenn gilt: .

**Herleitung der Formel von Moivre:**

Aus der Eulerschen Darstellung erkennt man, dass eine n-te Wurzel aus b ist. Rechnen Sie dies nach:



Da man *b* auch noch folgendermaßen schreiben kann:  () , erhält man weitere Lösungen.   
Notieren Sie die ersten beiden  und    
und berechnen Sie zur Kontrolle jeweils die n-te Potenz dieser Lösungen.

 

Bei welcher Zahl k erhält man zum ersten Mal wieder  als Lösung? Warum?

**Die Formel von Moivre**

Für jedes mit  hat die Gleichung genau n verschiedene Lösungen, nämlich die n-ten Wurzeln aus b, die man mit folgender Formel berechnet:

 mit 

**Information**

Die n-ten Wurzeln von b liegen in der Gaußschen Zahlenebene auf einem Kreis mit dem Radius um den Ursprung. Sie bilden ein regelmäßiges n-Eck.

Die Regel: „unter einem Wurzelzeichen darf keine negative Zahl stehen“ muss nun erweitert werden:

*Unter einem Wurzelzeichen dürfen weder negative noch komplexe Zahlen stehen.*

Wurzeln sind über Potenzgleichungen der Form definiert.

**Aufgabe 3** Berechnen Sie die dritten Wurzeln aus -1, d.h. lösen Sie die Gleichung .  
(Anleitung: Zuerst -1 in Eulerscher Darstellung, dann die Formel von Moivre)  
Zeichnen Sie die Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene ein.  
Kontrollieren Sie die Lösung auf zwei Arten:   
1) Entstand ein gleichseitiges Dreieck?  
2) Potenzieren Sie die Lösungen mit 3.

**Aufgabe 4** Leiten Sie aus Aufgabe 3 ohne nochmalige Anwendung der Formel von Moivre die Lösungen der Gleichung her und zeichnen Sie diese in die Zeichnung von Aufgabe 3 ein.

**Aufgabe 5** Berechnen und zeichnen Sie die Lösungen der Gleichung .  
Verallgemeinern Sie dies für und beschreiben Sie die entstehende Zeichnung in Worten:  
**Die n-ten Einheitswurzeln sind die Lösungen der Gleichung**  **und lauten**  **;**  **Beschreibung:**

**Aufgabe 6** Zerlegen Sie die Formel von Moivre so, dass man darin die n-ten Einheitswurzeln erkennen kann, also, dass sie zu einem Produkt mit dem Faktor  wird:  
  
  
Beschreiben Sie geometrisch, was sich daraus für die Lösungen der Gleichung ergibt, wenn man diese aus Aufgabe 5 herleiten möchte.

**Aufgabe 7** Lösen Sie die Gleichungen  
a)   
b)   
c)   
d) (Zuerst die rechte Seite umschreiben in Eulersche Darstellung.)  
e)    
f) 