

## Vertiefungskurs Mathematik

### Partielle Integration

#### Herleitung der Formel

Die partielle Integration wird aus der Produktregel hergeleitet. Hat man eine Funktion  $f$  als Produkt der Funktionen  $u$  und  $v$  gegeben, so lautet ihre Ableitung

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Falls  $u$  und  $v$  differenzierbar auf dem Intervall  $[a; b]$  und ihre Ableitungen stetig sind, so folgt nach

Integration beider Seiten über dem Intervall  $[a; b]$  und  $\int_a^b f'(x) dx = [f(x)]_a^b = [u(x) \cdot v(x)]_a^b$  :

$$[u(x) \cdot v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx + \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx$$

Ist nun eines der Integrale auf der rechten Seite lösbar, das andere aber nicht, so kann man die Gleichung nach diesem umstellen und es damit berechnen.

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx$$

#### Anwendung und „Tricks“

Die partielle Integration wird oft angewandt, wenn der Integrand aus dem Produkt einer ganzrationalen Funktion und einer weiteren Funktion besteht, zu der man (auch mehrfach) die Stammfunktion bilden kann. Die ganzrationale Funktion vom Grad  $n$  wird als Faktor  $v(x)$  gewählt, so dass beim Ableiten ihr Grad um 1 kleiner wird. So bleibt nach  $n$ -maliger Durchführung der partiellen Integration von der ganzrationalen Funktion ein konstanter Faktor übrig, und das Integral kann berechnet werden. Dies wird auf dem Blatt „Anwendung“ in Musteraufgabe 1 und 2 entwickelt.

Die Musteraufgabe 3 stellt den „Trick“  $\int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln(x) dx$  vor, mithilfe dessen man durch partielle Integration eine Stammfunktion der Logarithmusfunktion  $f$  mit  $f(x) = \ln(x)$  findet: Man setzt  $u'(x) = 1$  und  $v(x) = \ln(x)$  und erhält damit  $\dots = [x \cdot \ln(x)] - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = [x \cdot \ln(x) - x]$  und somit ist die Funktion  $F$  mit  $F(x) = x \cdot \ln(x) - x$  eine Stammfunktion. Diese wird auch in späteren Aufgaben noch benötigt und ist üblicherweise aus dem Mathematikunterricht noch nicht bekannt. Außerdem fällt beim Berechnen auf, dass es oft geschickt sein kann, den Faktor  $\ln(x)$  als  $v(x)$  zu wählen, da die Ableitung von  $f(x) = \ln(x)$  zu  $f'(x) = \frac{1}{x}$  wird und sich das  $x$  häufig geschickt mit dem anderen Faktor verrechnen lässt, so dass eine leicht integrierbare Funktion entsteht.

Hat man im Integranden beispielsweise ein Produkt aus zwei trigonometrischen Funktionen, so ergibt sich oft nach Anwenden der partiellen Integration auf der rechten Seite dasselbe Integral wie links.

Beispiel: 
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cdot \cos(x) dx = \left[ \sin(x) \cdot \sin(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot \sin(x) dx$$

So hat man eine Gleichung erzeugt, mit der man den Wert des Integrals bestimmen kann. Einfacher für Schüler/innen ist es, wenn sie in diesem Fall das Integral auf beiden Seiten durch eine Variable, z.B. A ersetzen und dann die Gleichung nach A auflösen.

Oft erlangt man das benötigte Integral auf der rechten Seite erst nach Umformungen, z.B. indem man den trigonometrischen Pythagoras  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  verwendet. Es erfordert einige Übung, bis Schüler/innen einen Blick für solche Umformungen entwickeln. Dazu dient die Musteraufgabe 4, mit der Aufgabe, den trigonometrischen Pythagoras herzuleiten, und die zugehörige Aufgabe auf dem Aufgabenblatt.