

Vertiefungskurs Mathematik

Integration durch Partialbruchzerlegung

Die Partialbruchzerlegung an sich ist keine Integrationsmethode, sondern eine Rechenregel, mit deren Hilfe man Terme gebrochen-rationaler Funktionen f in Summen von Brüchen der Form $\frac{a}{x-x_0}$ oder auch $\frac{a}{(x-x_0)^n}$ ($n \in \mathbb{N}$) umwandelt, wobei x_0 für eine Nullstelle des Nenners steht. Zu diesen Summanden lassen sich jeweils leicht die zugehörigen Summanden der Stammfunktion F finden.

Formeln

Besitzt der Nenner der gebrochen-rationalen Funktion f ausschließlich einfache reelle Nullstellen, so kann man schreiben:

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_n)} = \frac{a_1}{x-x_1} + \frac{a_2}{x-x_2} + \dots + \frac{a_n}{x-x_n}$$

Hier ist $g(x)$ ein Polynom von kleinerem Grad als n . Multipliziert man diese Gleichung mit dem Nenner von f durch und führt einen Koeffizientenvergleich durch, so erhält man ein LGS mit n Zeilen, mit dem man die Parameter a_1, \dots, a_n bestimmen kann. Im Schülerarbeitsblatt wird dies anhand eines Beispiels mit zwei Nullstellen gezeigt, in den Aufgaben wird nicht über drei Nullstellen hinaus gegangen.

Besitzt der Nenner der gebrochen-rationalen Funktion genau eine mehrfache reelle Nullstelle, so verändert sich der Ansatz:

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{a_1}{x-x_0} + \frac{a_2}{(x-x_0)^2} + \dots + \frac{a_n}{(x-x_0)^n}$$

Die Bestimmung der Parameter erfolgt wie oben mittels Durchmultiplizieren, Koeffizientenvergleich und Lösen des LGS. Auf dem Blatt „Anwendungen“ wird dieser Ansatz durch das Beispiel

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2} = \frac{x-1+2}{(x-1)^2} = \frac{x-1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$$

plausibel gemacht, aber nicht weiter erläutert. Über $n=2$ wird in den Aufgaben nicht hinaus gegangen.

Gibt es im Nenner einfache und mehrfache Nullstellen, so werden diese beiden Ansätze kombiniert. Das fällt den Schülerinnen und Schülern in der Regel recht leicht. Die Formel für eine Funktion mit einer einfachen und einer doppelten Nennernullstelle ist in Aufgabe 2 angegeben.

Man kann die Partialbruchzerlegung nur durchführen, wenn der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist, da sonst das LGS nicht eindeutig lösbar ist. Ist dies nicht der Fall, so muss davor eine Polynomdivision durchgeführt werden. Diese ist bislang eventuell nur mit einem Linearfaktor als Divisor bekannt, deshalb ist auf dem Blatt „Anwendungen“ in Aufgabe 4 ein vorgerechnetes Beispiel, in das die Schülerinnen und Schüler die Zwischenschritte eintragen können.