**Vertiefungskurs Mathematik 12**

**Beispiel für eine Taylorreihe mit**

Ein geeignetes Beispiel, für eine Entwicklungsmitte ist die natürliche

Logarithmusfunktion, da diese für nicht definiert ist.

Dabei wird den Schülerinnen und Schülern nicht von vorneherein die Schreibweise

mit den Potenzen von vorgegeben. Erst im Laufe des Beispiels wird sich

diese Schreibweise als vorteilhaft herausstellen.

Taylorpolynom 1.Grades:

Entwicklungsmitte:

Bedingungen: und

;

🡺 🡺

Taylorpolynom 2.Grades:

Entwicklungsmitte:

Bedingungen: und und

; ;

🡺

🡺 🡺 🡺

Es fällt auf, dass sich die Koeffizienten und des Polynoms bei verändert

haben.

Somit scheint der Vorteil der bisherigen Taylorpolynome, dass man nur einen neuen

Koeffizienten berechnen muss, für verloren gegangen zu sein.

An dieser Stelle kann man den Schülerinnen und Schüler mitteilen, dass man mit

einem „Trick“ den oben genannten Vorteil retten kann.

Es gilt:

D.h. man kann die alten Koeffizienten verwenden, falls man quasi als „Variable“ verwendet.

Insbesondere gilt:

Das Taylorpolynom 2.Grades enthält, wie gewohnt, das Taylorpolynom 1.Grades.

Dass dies auch für die höheren Grade gilt wird noch einmal am Beispiel von nachgewiesen und dann allgemein (ohne Beweis) übernommen.

Taylorpolynom 3.Grades:

Entwicklungsmitte:

Bedingungen:

und und und

; ;

🡺 🡺 🡺 🡺

🡺

Umschreiben von :

Bei der Berechnung von wird nur noch der neue Koeffizient berechnet.

Ansatz:

Es gilt: und

Aus folgt 🡺

Mit und folgt aus

Somit lautet die Taylorreihe für :

Diese Taylorreihe konvergiert nur auf dem Intervall und zudem konvergieren die Taylorpolynome sehr langsam. Man müsste daher einen sehr hohen Grad zur näherungsweisen Berechnung von Logarithmen verwenden.

Beispiel: ;

Hier ist schon die dritte Dezimale falsch.

Man müsste mindestens das Polynom vom 28.Grad verwenden, um auf Rechner-genauigkeit (10 Dezimalen) zu erhalten.

Daher ist diese Taylorreihe nicht geeignet, um damit gute Näherungen zu berechnen.

Anschließend zeigt man den Schülerinnen und Schülern, wie man mithilfe einer einfachen Substitution diese Taylorreihe eleganter schreiben kann.

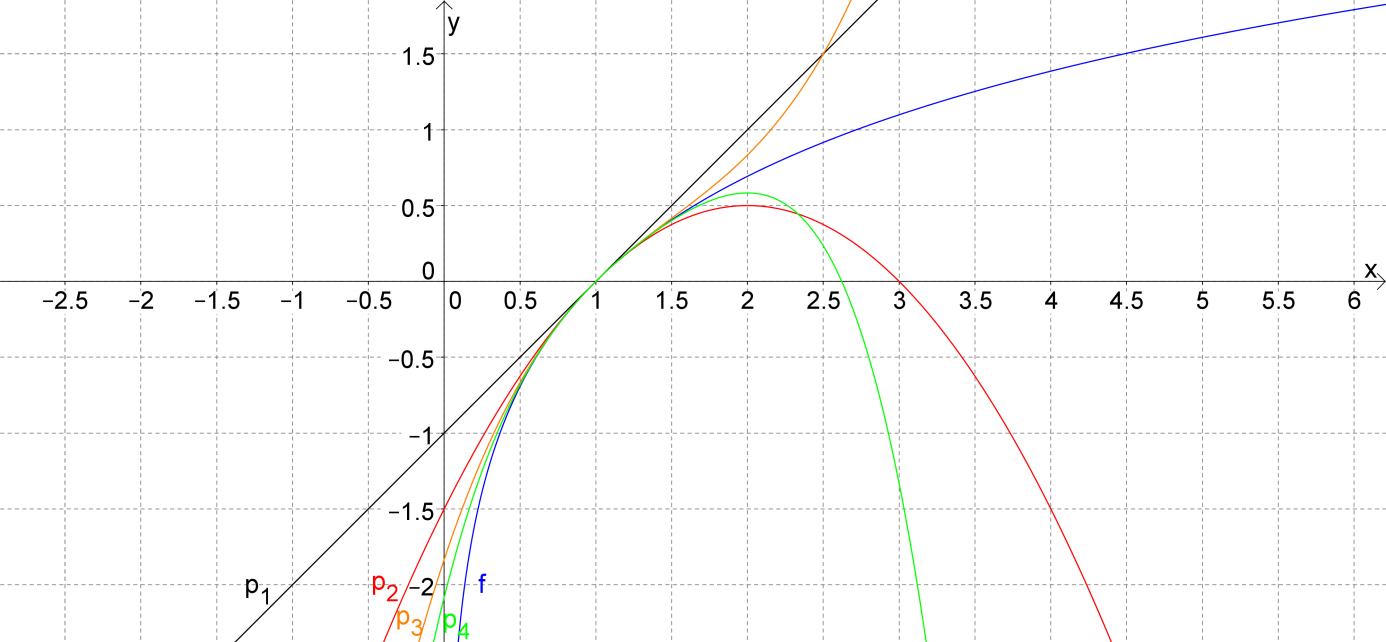
🡺

Will man also berechnen muss man in der Taylorreihe wählen.

Hinweis: Für hätte man auch die Entwicklungsmitte wählen

können.

Die Abbildung veranschaulicht die Genauigkeit einiger Taylorpolynome.



Danach wird noch die Taylorreihe mit einer beliebigen Entwicklungsmitte allgemein definiert.

Die Taylorreihe einer beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion f mit der Entwicklungsmitte lautet: